EXAMEN 21 juin 2007
Probabilités approfondies MM011

Durée 3 heures. Documents interdits

Exercice 1 On considère une chaîne de Markov $(X_n, n \geq 0)$ dans $E = \{1, 2, 3\}$ avec matrice de transition

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

1. Classer les états. Quelles sont les classes de récurrence/transience ?
2. Calculer la matrice potentielle U comme la plus petite solution non-négative de $U = I + QU$ et en déduire la valeur de $\mathbb{E}_x(N_y)$ pour tous $x, y \in E$, où N_y est le nombre de visite de X à y (utiliser autant que possible le résultat de la question 1).
3. Calculer la plus petite solution non-négative $v : E \mapsto \mathbb{R}_+$ de l'équation

   $$v(x) = 1 + Qv(x), \quad x \in \{2, 3\}, \qquad v(1) = 0.$$

   En déduire la valeur de $\mathbb{E}_x(T_{\{1\}})$ pour tout $x \in E$, où $T_{\{1\}}$ est le premier temps de visite de X à l'état 1.
4. Calculer une mesure de probabilité invariante et dire si elle est unique.
5. Soit $T_{\{1,2\}}$ le premier temps de visite de X à l'ensemble $\{1, 2\}$. Quelle est la loi de $T_{\{1,2\}}$ sous $\mathbb{P}_3$?
6. Remarquer que $\mathbb{E}_3(T_{\{1,2\}}) = \mathbb{E}_3(N_3)$. Quelle est la raison ?

(tourner la page $\longrightarrow$)

Exercice 2 On considère un jeu de hasard d'un joueur au casino. Le capital initial du joueur est de a euros, où $a \in \mathbb{N}$ est une constante et $a \geq 1$. Après l'énième partie le capital du joueur est $X_n \in \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$.

Si, après la énième partie, le capital X_n est 0, le joueur a perdu tout son argent et ne peut plus jouer (donc $X_{n+1} = X_n = 0$). Si $X_n \geq 1$, le joueur mise un nombre entier d'euros, qu'il choisit uniformément entre 1 et X_n ; la probabilité pour le joueur de gagner la $(n+1)$-ième partie est $1/2$, et la probabilité de perdre est $1/2$; si le joueur gagne, il reçoit la somme misée, sinon il cède la même somme.

Ce qui se traduit en formule : si $(\mathcal{F}_n)_n$ est la filtration naturelle de $(X_n)_n$, alors pour tout $n \geq 0$ et pour toute $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ borélienne et bornée :

$$\mathbb{E}\left(f(X_{n+1}) \,|\, \mathcal{F}_n\right) = 1_{(X_n=0)} \cdot f\left(0\right) + 1_{(X_n>0)} \cdot \frac{1}{2X_n} \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{k=1}^{X_n} f\left(X_n + \sigma k\right).$$

1. Prouver que $(X_n)_n$ est une martingale.
2. Prouver que X_n converge p.s. vers une variable Z p.s. finie.
3. Soit G_n l'événement $\{X_{n+1} = X_n\}$. Montrer qu'on a l'égalité d'événements

$$\{\ \textit{la suite } X_n \textit{ est constante à partir d'un certain rang}\ \} = \liminf_n G_n.$$

4. En tenant compte que les variables $(X_n)_n$ prennent seulement des valeurs entières, déduire de la question 2 que $\mathbb{P}(\liminf_n G_n) = 1$.
5. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n > 0 \text{ et } X_{n+1} = X_n) = 0$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ p.s. $\{X_{n+1} = X_n\} \subseteq \{X_n = 0\}$ et que $\mathbb{P}(\liminf_n \{X_n = 0\}) = 1$.
6. Conclure que $Z = 0$ p.s.
7. Quelle est l'interprétation des résultats des questions précédentes en termes de victoire/perte du joueur ?

Dans les questions qui suivent, on peut supposer connus les résultats des questions 1, 2 et 6 ci-dessus.

A. La suite $(X_n, n \geq 0)$ est-elle uniformément intégrable ? Converge-t-elle dans L^1 ?

B. La suite $(\sqrt{X_n}, n \geq 0)$ est-elle uniformément intégrable ? Converge-t-elle dans L^1 ?

C. La suite $(X_n^2, n \geq 0)$ est-elle bornée dans L^1 ?

Corrigé (MM011 Probabilités approfondies, 21 juin 2007)

Correction de l'exercice 1

1. 3 conduit à 1 et 2, mais ni 1 ni 2 ne conduisent à 3, donc 3 est transient ; 1 conduit à 2 et 2 conduit à 1 ; il y a au moins un état récurrent, donc $\{1,2\}$ est une classe close récurrente et $\{3\}$ est une classe transitoire.
2. On sait que : $U(x,y) = \mathbb{E}_x(N_y)$, $x, y \in E$. Par la réponse à la question 1, on sait que $\mathbb{E}_x(N_1) = \mathbb{E}_x(N_2) = +\infty$ pour tout $x \in E$, car tout état conduit à 1 et 2, qui sont récurrents. Puisque ni 1 ni 2 ne conduisent à 3, $\mathbb{E}_1(N_3) = \mathbb{E}_2(N_3) = 0$. Donc U est sous la forme :
$$U = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & U(3,3) \end{pmatrix}$$
De l'équation $U = I + QU$ on trouve $U(3,3) = 1 + Q(3,3)\,U(3,3) = 1 + \frac{1}{3}U(3,3)$, donc $U(3,3) = \frac{3}{2}$.
3. On a $v(1) = 0$, $v(2) = 1+\frac{1}{2}(v(1)+v(2))$, $v(3) = 1+\frac{1}{3}(v(1)+v(2)+v(3))$; donc $v(2) = 2$, $v(3) = \frac{5}{2}$. Puisque $\mathbb{E}_x(T_{\{1\}}) = v(x)$, on a la réponse.
4. Une mesure de probabilité invariante est $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ avec $\pi_i \geq 0$, $\sum_i \pi_i = 1$ et $\pi Q = \pi$. On pose le système
$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3), \qquad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1.$$
On voit que $\pi_3 = \frac{1}{3}\pi_3$, donc $\pi_3 = 0$; $\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_2$, donc $\pi_1 = \frac{1}{3}$ et $\pi_2 = \frac{2}{3}$ et $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$. Ce système algébrique admet une seule solution.
5. Partant de 3, la chaîne reste en 3 avec probabilité $\frac{1}{3}$ et entre dans $\{1,2\}$ avec probabilité $\frac{2}{3}$. Donc $T_{\{1,2\}}$ a sous $\mathbb{P}_3$ loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$.
6. En effet, $\mathbb{E}_3(T_{\{1,2\}}) = \frac{3}{2} = \mathbb{E}_3(N_3)$. La raison est que, une fois quitté l'état 3, la chaîne n'y revient jamais ; donc $\mathbb{P}_3$-p.s. les événements $\{T_{\{1,2\}} = k\}$ et $\{X_0 = X_1 = \cdots = X_{k-1} = 3,\ X_j \neq 3\ \forall j \geq k\}$ coïncident et, par conséquence, $\mathbb{P}_3$-p.s. $T_{\{1,2\}} = N_3$.

Correction de l'exercice 2

1. On voit par récurrence que p.s. pour tout $n \geq 0$ on a $0 \leq X_n \leq 2^n a$, car à chaque partie le capital peut au plus doubler. Si on pose pour

$n \geq 0$, $f(x) := \min\{x, 2^{n+1}a\}$, $x \in \mathbb{N}$, alors f est bornée et $f(X_i) = X_i$ pour tout $i \leq n+1$. On trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right) = \mathbb{E}\left(f(X_{n+1}) \,|\, \mathcal{F}_n\right)& \\
&= 1_{(X_n=0)} \cdot 0 + 1_{(X_n>0)} \cdot \frac{1}{2X_n} \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{k=1}^{X_n} (X_n + \sigma k) \\
&= X_n + 1_{(X_n>0)} \cdot \sum_{k=1}^{X_n} \frac{k-k}{2X_n} = X_n.
\end{aligned}$$

En particulier $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0) = a$.

2. $(X_n)_n$ est une martingale positive, donc la limite $Z \geq 0$ de X_n quand $n \to \infty$ existe p.s. Par le lemme de Fatou $\mathbb{E}(Z) \leq \liminf_n \mathbb{E}(X_n) = a < +\infty$ et donc Z est finie p.s.
3. Soit G_n l'événement $\{X_{n+1} = X_n\}$. Par définition on a $\liminf_n G_n = \cup_{n\geq 1} H_n$, où $H_n = \cap_{k \geq n} G_k$. Or $H_n = \{X_k = X_n, \forall\, k \geq n\}$, donc on a que $\liminf_n G_n = \{\textit{il existe un } n \textit{ tel que } X_k = X_n \textit{ pour tout } k \geq n\}$.
4. Une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{N}$ doit être constante à partir d'un certain rang. Puisque p.s. $X_n \in \mathbb{N}$ converge, alors p.s. X_n est constante à partir d'un certain rang et donc $\mathbb{P}(\liminf_n G_n) = 1$.
5.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_n > 0 \text{ et } X_{n+1} = X_n) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(X_n > 0 \text{ et } X_{n+1} = X_n \,|\, \mathcal{F}_n)) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{P}(X_n > 0 \text{ et } X_{n+1} = X_n \,|\, X_n)).
\end{aligned}$$

   Or, pour tout $x \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X_n > 0 \text{ et } X_{n+1} = X_n \,|\, X_n = x) = \frac{1_{(x>0)}}{2x} \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{k=1}^{x} 1_{(x+\sigma k = x)} = 0,$$

   donc $\mathbb{P}(X_n > 0 \text{ et } X_{n+1} = X_n) = \mathbb{E}(0) = 0$. Puisque $\mathbb{P}(\{X_{n+1} = X_n\} \cap \{X_n = 0\}^c) = 0$, on a p.s. $\{X_{n+1} = X_n\} \subseteq \{X_n = 0\}$. Donc $\liminf_n G_n \subseteq \liminf_n \{X_n = 0\}$ et $\mathbb{P}(\liminf_n \{X_n = 0\}) = 1$ par la question 4.
6. Puisque X_n est p.s. 0 à partir d'un certain rang, on a que p.s. $Z = \lim_n X_n = 0$.
7. Si le joueur continue à jouer indéfiniment, il est (presque) sûr de perdre entièrement son capital initial.

A. Une suite uniformément intégrable qui converge p.s. vers une variable, doit converger dans L^1 vers la même variable. Dans notre cas, X_n converge p.s. vers 0, mais $\lim_n \mathbb{E}(X_n) = a \neq \mathbb{E}(0) = 0$. Donc $(X_n, n \geq 0)$ n'est pas uniformément intégrable et ne converge pas dans L^1.

B. On pose $Y_n := \sqrt{X_n}$, $n \geq 0$. Puisque $\mathbb{E}(Y_n^2) = \mathbb{E}(X_n) = a$, on a que $(Y_n, n \geq 0)$ est bornée dans L^2, donc uniformément intégrable. Puisque $Y_n = \sqrt{X_n} \to 0$ p.s. et $(Y_n, n \geq 0)$ est uniformément intégrable, on a que Y_n converge dans L^1.

C. Si la suite $(X_n^2, n \geq 0)$ était bornée dans L^1, la suite $(X_n, n \geq 0)$ serait bornée dans L^2 et donc uniformément intégrable, ce qui n'est pas le cas par la question A.