**EXAMEN 18 décembre 2007**

Probabilités approfondies MM011

**Durée 3 heures. Documents interdits**

**Exercice 1** Soit $X$ une variable réelle de loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, $\sigma^2 \in ]0,+\infty[$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\eta_k$ une variable réelle de loi $\mathcal{N}(0,\varepsilon_k^2)$, $\varepsilon_k > 0$, telles que la famille $\{X, \eta_0, \eta_1, \ldots\}$ soit indépendante. On définit $Y_k = X + \eta_k$, $k \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, \ldots, Y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_\infty = \sigma(Y_n, n \geq 0)$.

Nous essayons de mesurer une quantité aléatoire $X$ avec une suite indépendante d'expériences. L'expérience $k$ donne comme résultat $Y_k = X + \eta_k$, où $\eta_k$ est une erreur qui dépend de la précision des instruments. Après $n$ expériences, la meilleure prévision possible sur $X$ est

$$X_n := \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X \mid Y_0, \ldots, Y_n).$$

On se demande s'il est possible d'obtenir la valeur de $X$ quand $n$ tend vers l'infini, et notamment si $X_n$ converge vers $X$.

1. Montrer que $(X_n)$ est une martingale et que $X_n$ converge p.s. et dans $L^1$ vers une variable $X_\infty$. Quelle est la relation entre $X$ et $X_\infty$ ?
2. Montrer que $(X_n)$ est bornée dans $L^2$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
   a) $X_n \to X$ dans $L^2$ ; b) $X_n \to X$ dans $L^1$ ; c) $X$ est $\mathcal{F}_\infty$-mesurable.
3. Calculer $\mathbb{E}(Y_i Y_j)$, $\mathbb{E}(Y_i^2)$ et $\mathbb{E}(XY_i)$ pour $i, j \geq 0$, $i \neq j$. Montrer que pour tout $n \geq 0$ et $i = 0, \ldots, n$ l'on a $\mathbb{E}(Z_n Y_i) = 0$, où

$$Z_n := X - \frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2 \sum_{k=0}^n \varepsilon_k^{-2}} \sum_{j=0}^n \varepsilon_j^{-2}\, Y_j.$$

4. Montrer que pour tout $n \geq 0$ la variable $Z_n$ est indépendante de $\{Y_0, \ldots, Y_n\}$ et en déduire que $X_n = X - Z_n$.
5. Calculer $\mathbb{E}((X - X_n)^2)$ et montrer que $X_n \to X$ dans $L^2$ si et seulement si $\lim_n \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^{-2} = +\infty$.
6. Discuter le cas $\varepsilon_i = \varepsilon > 0$ pour tout $i \geq 0$, notamment les liens avec la loi des grands nombres.

On rappelle qu'une variable aléatoire $Y$ à valeurs $\mathbb{N}^*$ est dite géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$ si

$$\mathbb{P}(Y = y) = q^{y-1}\, p, \qquad \forall\ y \geq 1,$$

où $q = 1 - p$. On rappelle aussi que $\mathbb{P}(Y > y) = q^y$ pour tout $y \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{E}(Y) = 1/p$.

**Exercice 2** Dans cet exercice on considère une suite indépendante $(X_n)$ de variables géométriques de paramètre $p \in ]0,1[$, qui modélisent (par exemple) la durée d'un stock d'ampoules. Les ampoules sont numérotées à partir de 0 ; elles sont allumées toutes au même instant ; $X_n$ est la durée de l'ampoule $n$.

On définit les temps des records successifs de durée des ampoules :

$$\tau_0 := 0, \qquad \tau_{n+1} := \inf\{k > \tau_n : X_k > X_{\tau_n}\}, \qquad n \geq 0,$$

et les records successifs $Z_n := X_{\tau_n}$, $n \geq 0$. Donc $Z_n$ est l'énième record de durée que l'on rencontre dans la suite $(X_n)$. Dans la suite on considère une chaîne de Markov $(X_n)$ dans $\mathbb{N}^*$ sous forme canonique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, X_n, (\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{N}^*})$ avec matrice de transition

$$Q(x,y) = q^{y-1}\, p, \qquad x, y \in \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer que sous $\mathbb{P}_x$ la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est indépendante, $X_n$ est une variable géométrique de parametre $p$ pour tout $n \geq 1$, et $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$.
2. Soit $x \in \mathbb{N}^*$ fixé. Calculer
$$\mathbb{P}_x(X_1 \leq x,\ \ldots,\ X_{k-1} \leq x,\ X_k > y), \qquad k, y \in \mathbb{N}^*,\ y \geq x.$$
3. On définit $\tau := \inf\{n \geq 1 : X_n > X_0\}$, $\inf \emptyset := +\infty$. Calculer
$$\mathbb{P}_x(\tau = k,\ X_k > y), \qquad k, y \in \mathbb{N}^*,\ y \geq x.$$
Montrer que, sous $\mathbb{P}_x$, $\tau$ est une variable géométrique avec un paramètre que l'on déterminera et que $X_\tau$ a la même loi que $x + X_1$. Le couple $(\tau, X_\tau)$ est-il indépendant sous $\mathbb{P}_x$ ?
4. Montrer que $\pi(x) = q^{x-1}p$, $x \in \mathbb{N}^*$, est la seule mesure de probabilité invariante pour $Q$. Montrer que $\mathbb{P}_\pi(\tau < +\infty) = 1$ et $\mathbb{E}_\pi(\tau) = +\infty$.
5. Montrer que $\tau$ est un temps d'arrêt. On peut dans la suite utiliser le fait que pour les temps $\tau_n$ définis ci-dessus l'on a $\tau_{n+1} = \tau_n + \tau \circ \theta_{\tau_n}$ et donc $\tau_n$ est aussi un temps d'arrêt (fini $\mathbb{P}_x$-p.s. pour tout $x \in \mathbb{N}^*$).
6. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov dans $\mathbb{N}^*$ sous $\mathbb{P}_x$ par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{\tau_n})$. Calculer sa matrice de transition et sa loi initiale.
7. Calculer pour toute fonction bornée $f : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{R}$ l'espérance conditionnelle de $f(Z_{n+1} - Z_n)$ sachant $\mathcal{F}_{\tau_n}$. Montrer que la suite $(Z_n - Z_{n-1})_{n\geq 1}$ est i.i.d. sous $\mathbb{P}_x$.
8. Calculer la limite $\mathbb{P}_x$-presque sûre de $Z_n/n$, pour tout $x \in \mathbb{N}^*$.

**Corrigé** (MM011 Probabilités approfondies, 18 décembre 2007)

**Correction de l'exercice 1** (10 points sur 20)

1. La famille de tribus $(\mathcal{F}_n)$ est croissante et forme donc une filtration. La variable gaussienne $X$ est dans $L^2 \subset L^1$ et donc le processus $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)$ forme une martingale régulière. On sait donc que $X_n$ converge dans $L^1$ et p.s. vers une variable $\mathcal{F}_\infty$-mesurable $X_\infty = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_\infty)$.
2. La fonction $f(x) = x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ et donc par l'inégalité de Jensen
$$\mathbb{E}(X_n^2) = \mathbb{E}((\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n))^2) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(X^2 \mid \mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(X^2) = \sigma^2.$$
$(X_n)$ est donc une martingale bornée dans $L^2$ ; $(X_n)$ converge donc vers $X_\infty$ dans $L^2$.
Prouvons a) $\Longrightarrow$ b). La convergence dans $L^2$ implique la convergence dans $L^1$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Prouvons b) $\Longrightarrow$ c). Si $X_n$ converge vers $X$ dans $L^1$, par l'unicité de la limite on a $X = X_\infty = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_\infty)$ ; donc $X$ est $\mathcal{F}_\infty$-mesurable.
Prouvons c) $\Longrightarrow$ a). Si $X$ est $\mathcal{F}_\infty$-mesurable on a $X = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_\infty) = X_\infty$. Or $X_n$ converge vers $X_\infty$ dans $L^2$.
3. On a $\mathbb{E}(Y_i^2) = \mathbb{E}(X^2 + \eta_i^2) = \sigma^2 + \varepsilon_i^2$, alors que pour $i \neq j$, $\mathbb{E}(Y_i Y_j) = \mathbb{E}(X^2) = \sigma^2$ et $\mathbb{E}(XY_i) = \sigma^2$. Il s'en suit que pour tout $k = 0, \ldots, n$
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_n\, Y_k) &= \mathbb{E}(X\, Y_k) - \frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2 \sum_{j=0}^n \varepsilon_j^{-2}} \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^{-2}\, \mathbb{E}(Y_i\, Y_k) \\ &= \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2 \sum_{j=0}^n \varepsilon_j^{-2}} \left(1 + \sigma^2 \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^{-2}\right) = 0.\end{aligned}$$
4. Le vecteur $(Z_n, Y_0, \ldots, Y_n)$ est gaussien car il est une fonction linéaire de $(X, \eta_0, \ldots, \eta_n)$, qui est un vecteur avec composantes gaussiennes indépendantes et donc gaussien. En outre $(Z_n, Y_0, \ldots, Y_n)$ est centré comme fonction linéaire du vecteur centré $(X, \eta_0, \ldots, \eta_n)$.
Donc $\mathrm{Cov}(Z_n, Y_k) = 0$ pour tout $k = 0, \ldots, n$ est une condition nécessaire et suffisante pour l'indépendance de $Z_n$ de $\{Y_0, \ldots, Y_n\}$. Il s'en suit que
$$\mathbb{E}(Z_n \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Z_n) = 0 = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n) - \frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2 \sum_{j=0}^n \varepsilon_j^{-2}} \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^{-2}\, Y_i,$$
et finalement
$$X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n) = \frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2 \sum_{j=0}^n \varepsilon_j^{-2}} \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^{-2}\, Y_i = X - Z_n.$$

5. Puisque $X - X_n = Z_n$ on a $\mathbb{E}((X - X_n)^2) = \mathbb{E}(Z_n^2)$ et

$$\mathbb{E}(Z_n^2) = \mathbb{E}\left(X^2\left(1 - \frac{\sigma^2\sum_{i=0}^n \varepsilon_i^{-2}}{1+\sigma^2\sum_{j=0}^n \varepsilon_j^{-2}}\right)^2 + \sum_{i=0}^n \eta_i^2\left(\frac{\sigma^2\varepsilon_i^{-2}}{1+\sigma^2\sum_{j=0}^n \varepsilon_j^{-2}}\right)^2\right)$$
$$= \sigma^2\frac{1}{\left(1+\sigma^2\sum_{j=0}^n \varepsilon_j^{-2}\right)^2} + \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^{-2}\left(\frac{\sigma^2\varepsilon_i^{-2}}{1+\sigma^2\sum_{j=0}^n \varepsilon_j^{-2}}\right)^2$$
$$= \sigma^2\frac{1+\sigma^2\sum_{i=0}^n \varepsilon_i^{-2}}{\left(1+\sigma^2\sum_{j=0}^n \varepsilon_j^{-2}\right)^2} = \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2\sum_{j=0}^n \varepsilon_j^{-2}}.$$

   Donc $\mathbb{E}((X - X_n)^2) \to 0$ ssi $\sum_{j=0}^n \varepsilon_j^{-2} \to +\infty$.

6. Si $\varepsilon_i = \varepsilon > 0$ pour tout $i \geq 0$ alors on a

$$X_n = \frac{(n+1)\sigma^2}{\varepsilon^2 + (n+1)\sigma^2}\,X + \frac{\eta_0 + \cdots + \eta_n}{\varepsilon^2 + (n+1)\sigma^2}.$$

   Donc $X_n \to X$ dans $L^2$ par la loi des grands nombres pour suites i.i.d. dans $L^2$ :

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{\eta_0 + \cdots + \eta_n}{n+1}\right)^2\right) = \frac{(n+1)\varepsilon^2}{(n+1)^2} = \frac{\varepsilon^2}{n+1} \to 0.$$

   On peut aussi remarquer que, toujours par la loi forte des grands nombres

$$\frac{Y_0 + \cdots + Y_n}{n+1} = X + \frac{\eta_0 + \cdots + \eta_n}{n+1} \to X$$

   p.s. et donc $X$ est $\mathcal{F}_\infty$-mesurable car limite de variables $\mathcal{F}_\infty$-mesurables.

**Correction de l'exercice 2** (13 points sur 20)

1. Pour avoir l'indépendance de la suite $(X_n)$, il faut et il suffit que pour tout $n \geq 1$ la famille $\{X_0, \ldots, X_n\}$ soit indépendante. Par définition de suite markovienne nous avons pour tous $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) &= \mathbf{1}_{\{x=x_0\}}\, Q(x_0, x_1)\cdots Q(x_{n-1}, x_n)\\ &= \mathbf{1}_{\{x=x_0\}}\, q^{x_1-1}p\,\cdots\, q^{x_n-1}p\end{aligned}$$

   qui correspond exactement à une famille indépendante telle que $X_0 = x$ p.s. et $\{X_1, \ldots, X_n\}$ soient variables géométriques de paramètre $p$.

2. Pour $x \in \mathbb{N}^*$ fixé, par l'indépendance

$$\mathbb{P}_x(X_1 \leq x, \ldots, X_{k-1} \leq x, X_k > y) = (1-q^x)^{k-1} q^y = (1-q^x)^{k-1} q^x \cdot q^{y-x}$$

pour $k, y \in \mathbb{N}^*$, $y \geq x$.

3. Pour $k, y \in \mathbb{N}^*$ et $y \geq x$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_x(\tau = k,\ X_k > y) = \mathbb{P}_x(X_1 \leq X_0, \ldots, X_{k-1} \leq X_0, X_k > y)\\&= \mathbb{P}_x(X_1 \leq x, \ldots, X_{k-1} \leq x, X_k > y) = (1-q^x)^{k-1} q^x \cdot q^{y-x}.\end{aligned}$$

Pour $y = x$ on trouve

$$\mathbb{P}_x(\tau = k) = (1-q^x)^{k-1} q^x,$$

et si on somme sur $k$ on obtient

$$\mathbb{P}_x(X_\tau > y) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}_x(\tau = k,\ X_k > y) = \sum_{k \geq 1} (1-q^x)^{k-1} q^x \cdot q^{y-x} = q^{y-x}.$$

Donc $\tau$ est sous $\mathbb{P}_x$ une variable géométrique de paramètre $q^x$ et $X_\tau$ a la loi de $x + X_1$. Le couple est indépendant car pour tous $k, y \in \mathbb{N}^*$ et $y \geq x$

$$\mathbb{P}_x(\tau = k,\ X_\tau > y) = \mathbb{P}_x(\tau = k)\, \mathbb{P}_x(X_\tau > y).$$

4. Une mesure de probabilité invariante $\pi$ sur $\mathbb{N}^*$ doit satisfaire

$$\pi(x) = \sum_{y \in \mathbb{N}^*} \pi(y)\, Q(y, x) = \sum_{y \in \mathbb{N}^*} \pi(y)\, q^{x-1} p = q^{x-1} p, \qquad \forall x \in \mathbb{N}^*.$$

Donc $\pi(x) = q^{x-1} p$ est la seule probabilité invariante. Pour l'unicité, on peut aussi montrer que la chaîne $(X_n)$ est irréductible est récurrente positive. Or

$$\mathbb{P}_\pi(\tau < +\infty) = \sum_x \pi(x)\, \mathbb{P}_x(\tau < +\infty) = \sum_x \pi(x) = 1,$$

car sous $\mathbb{P}_x$ $\tau$ est une variable géométrique et donc p.s. finie. On a aussi

$$\mathbb{E}_\pi(\tau) = \sum_{x \geq 1} \mathbb{E}_x(\tau)\, q^{x-1}\, p = \sum_{x \geq 1} q^{-x}\, q^{x-1}\, p = +\infty.$$

5. Pour tout $n \geq 1$ :

$$\{\tau = n\} = \{X_1 \leq X_0, \ldots, X_{k-1} \leq X_0, X_k > X_0\} \in \mathcal{F}_n, \quad \{\tau = 0\} = \emptyset \in \mathcal{F}_0.$$

6. On veut calculer pour toute fonction bornée $f : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{R}$ l'espérance conditionnelle de $f(Z_{n+1})$ sachant $\mathcal{F}_{\tau_n}$. Par la propriété forte de Markov pour la chaîne de Markov $(X_n)$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x(f(X_{\tau_{n+1}})\,|\,\mathcal{F}_{\tau_n}) &= \mathbb{E}_x(f(X_{\tau_n+\tau\circ\theta_{\tau_n}})\,\mathbf{1}_{\{\tau_n<+\infty\}}\,|\,\mathcal{F}_{\tau_n}) = \mathbb{E}_{X_{\tau_n}}(f(X_\tau))\\ &= \sum_{y\geq 1} f(X_{\tau_n}+y)\,q^{y-1}\,p.\end{aligned}$$

   Nous obtenons

$$\mathbb{E}_x(f(Z_{n+1})\,|\,\mathcal{F}_{\tau_n}) = \sum_{y\geq 1} f(Z_n+y)\,q^{y-1}\,p = \sum_{y\geq Z_n+1} f(y)\,q^{y-Z_n-1}\,p.$$

   Donc la suite $(Z_n)$ est markovienne avec matrice de transition

$$Q^Z(x,y) = \mathbf{1}_{\{y>x\}}\,q^{y-x-1}\,p.$$

7. Par la propriété forte de Markov pour la chaîne de Markov $(X_n)$ on a pour toute fonction bornée $f : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x(f(X_{\tau_{n+1}}-X_{\tau_n})\,|\,\mathcal{F}_{\tau_n}) &= \mathbb{E}_x(f(X_{\tau_n+\tau\circ\theta_{\tau_n}}-X_{\tau_n})\,\mathbf{1}_{\{\tau_n<+\infty\}}\,|\,\mathcal{F}_{\tau_n})\\ &= \mathbb{E}_{X_{\tau_n}}(f(X_\tau-X_0)) = \sum_{y\geq 1} f(y)\,q^{y-1}\,p,\end{aligned}$$

   où encore une fois nous avons utilisé que $X_\tau - z$ a sous $\mathbb{P}_z$ la même loi que $X_1$. On obtient

$$\mathbb{E}_x(f(Z_{n+1}-Z_n)\,|\,\mathcal{F}_{\tau_n}) = \sum_{y\geq 1} f(y)\,q^{y-1}\,p.$$

   Si on prend l'espérance dans cette égalité on voit que

$$\mathbb{E}_x(f(Z_{n+1}-Z_n)) = \sum_{y\geq 1} f(y)\,q^{y-1}\,p = \mathbb{E}_x(f(Z_{n+1}-Z_n)\,|\,\mathcal{F}_{\tau_n}),$$

   donc pour toute fonction bornée $f : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}_x(f(Z_{n+1}-Z_n)\,|\,\mathcal{F}_{\tau_n}) = \mathbb{E}_x(f(Z_{n+1}-Z_n)),$$

   et il s'en suit que $Z_{n+1}-Z_n$ est indépendante de $\mathcal{F}_{\tau_n}$. Mais $Z_i - Z_{i-1} = X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}$ est $\mathcal{F}_{\tau_i}$-mesurable et donc $(Z_i - Z_{i-1})_{i\geq 1}$ est indépendante. En outre $(Z_i - Z_{i-1})$ est une variable géométrique de paramètre $p$ pour tout $i \geq 1$, donc $(Z_i - Z_{i-1})_{i\geq 1}$ est i.i.d..

8. Puisque $Z_0 = X_0 = x$ $\mathbb{P}_x$-p.s., on obtient par récurrence que

$$Z_n = x + \sum_{i=1}^{n} (Z_i - Z_{i-1})$$

avec $(Z_i - Z_{i-1})_{i \geq 1}$ i.i.d. et $Z_i - Z_{i-1}$ variable géométrique de paramètre $p$ ; on peut remarquer que $Z_n$ a sous $\mathbb{P}_x$ même loi que $x + X_1 + \cdots + X_n$. On peut appliquer la loi des grands nombres :

$$\frac{Z_n}{n} = \frac{x}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (Z_i - Z_{i-1}) \to \mathbb{E}(Z_1 - Z_0) = \frac{1}{p}.$$