EXAMEN 16 juin 2008
Probabilités approfondies MM011

Durée 3 heures. Documents interdits

Exercice 1 (Un jeu de cartes à un seul joueur). On prend un jeu de 52 cartes, on les retourne une à une ; le joueur peut, une et une seule fois au cours du jeu, dire *"rouge la prochaine !"*, il gagne si la carte suivante est rouge, sinon il perd. On se demande quelles sont les stratégies de jeu qui optimisent la probabilité de victoire.

1. Soit R_n, $n = 0, \ldots, 51$, le nombre de cartes rouges encore dans le jeu après avoir retourné n cartes. Soit A_n l'événement $\{$la n-ième carte retournée est rouge$\}$. Calculer $\mathbb{P}(A_{n+1} \,|\, R_n = j)$, pour $j \in \{0, \ldots, 26\}$, $n \in \{0, \ldots, 50\}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(R_{n+1} = j \,|\, R_n) = \mathbb{P}(R_{n+1} = j \,|\, \mathcal{F}_n)$, pour $n \in \{0, \ldots, 50\}$, $j \in \{0, \ldots, 26\}$, où $\mathcal{F}_n := \sigma(R_0, \ldots, R_n)$. Montrer que
$$\mathbb{E}(R_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = R_n - \frac{R_n}{52 - n}, \qquad n = 0, \ldots, 50.$$
Montrer que $X_n := R_n/(52-n)$, $n = 0, \ldots, 51$, est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ et que $X_n = \mathbb{P}(A_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n)$.
3. On définit $\tau = n \in \{0, \ldots, 51\}$ si le joueur dit *"rouge la prochaine !"* avant de retourner la $(n+1)$-ième carte. Montrer que τ est un temps d'arrêt et que la probabilité de victoire est $\mathbb{E}(X_\tau)$. Montrer que, pour toute stratégie, la probabilité p de victoire dans ce jeu est toujours la même et calculer p.

Exercice 2 Serge aime beaucoup le vin. Après avoir trop bu, il s'endort et fait le rêve suivant : au départ il a une somme d'argent $x \in \mathbb{N}$ (en Euros) ; à chaque minute il boit un verre de vin, qui lui coûte un Euro ; chaque fois qu'il épuise son capital, il trouve un porte monnaie qui contient un nombre entier et aléatoire de pièces d'un Euro, et il recommence instantanément à acheter du vin et boire. Le rêve continue de la même façon indéfiniment...

On modélise le capital X_n à disposition de Serge à chaque minute $n \in \mathbb{N}$ à l'aide d'une chaîne de Markov sur $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$, avec matrice de transition

$$Q(x,y) = \begin{cases} f(y+1) & x = 0,\ y \geq 0 \\ 1 & x > 0,\ y = x - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où f est une probabilité sur $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$, $f : \mathbb{N}^* \mapsto]0,1[$, $\sum_n f(n) = 1$, avec $f(y) > 0$ pour tout $y \in \mathbb{N}^*$.

Sous $\mathbb{P}_x$, (X_n) est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ avec probabilité de transition Q et état initial déterministe $X_0 = x \in \mathbb{N}$. Si au temps i le capital de Serge est $y > 0$, au temps $i+1$ le capital sera $y-1$. Si au temps i le capital de Serge est nul, il trouve une quantité $y \geq 1$ de pièces avec probabilité $f(y)$, et il en dépense instantanément une, ainsi que son capital au temps $i+1$ sera $y-1$ avec probabilité $f(y)$. Soient $S_0 := 0$, $S_{n+1} := \inf\{i > S_n : X_i = 0\}$, les retours successifs à l'état 0.

1. Quelles sont les classes de communication de la chaîne de Markov (X_n) ?
2. Montrer que $\mathbb{P}_0(S_1 = n) = f(n)$, $n \geq 1$. En déduire la classification des états en classes récurrentes/transitoires.
3. Montrer que la mesure sur $\mathbb{N}$

$$\lambda(x) = \sum_{y=x+1}^{\infty} f(y), \qquad x \in \mathbb{N},$$

est invariante pour Q et que toute mesure invariante est un multiple de λ.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (X_n) soit récurrente positive. Montrer qu'il existe une seule mesure de probabilité invariante ssi

$$m := \sum_n n\, f(n) < +\infty.$$

On suppose la condition $m < +\infty$ satisfaite dans la suite de l'exercice.

5. Calculer la limite $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_x(X_n = y)$, pour tous $x, y \in \mathbb{N}$.
6. Définir $u(n) := \mathbb{P}_0(X_n = 0)$. Montrer que $\{X_0 = X_n = 0\} = \cup_{z \leq n}\{X_0 = X_n = 0,\, S_1 = z\}$ et en déduire que

$$u(n) = \sum_{z=1}^{n} f(z)\, u(n-z) = f * u(n), \qquad n \geq 1.$$

7. Soit $t_i := S_i - S_{i-1}$, $i \geq 1$. Montrer que $(t_i)_{i\geq 1}$ est sous $\mathbb{P}_0$ une suite iid et calculer $\mathbb{P}_0(t_i = n)$, $n \geq 1$.
8. Montrer que $\mathbb{P}_0(S_i = n) = f^{i*}(n)$, où $f^{i*} = f * \cdots * f$ est la convolution i fois de f pour $i \geq 1$.
9. Montrer que $\{X_n = 0\} = \cup_i \{S_i = n\}$ et en déduire que

$$u(n) = \sum_{i=1}^{\infty} f^{i*}(n), \qquad n \geq 1. \tag{1}$$

10. Montrer le *Théorème du Renouvellement* : si u est définie par (1), alors

$$\lim_{n\to+\infty} u(n) = \frac{1}{m}.$$

Corrigé (MM011 Probabilités approfondies, 16 juin 2008)

Correction de l'exercice 1

1. Soit A_n l'événement {l'n-ième carte retournée est rouge}. Après avoir retourné n cartes, le jeu en contient encore $52-n$, et si $R_n = j$, alors il contient j cartes rouges par définition. Donc
$$\mathbb{P}(A_{n+1} \,|\, R_n = j) = \frac{j}{52-n}, \qquad j \in \{0, \ldots, 26\}.$$
2. La loi conditionnelle de R_{n+1} sachant R_n est concentrée sur $\{R_n, R_n - 1\}$ et
$$\mathbb{P}(R_{n+1} = R_n - 1 \,|\, R_n) = \mathbb{P}(A_{n+1} \,|\, R_n) = \frac{R_n}{52-n} = X_n,$$
$$\mathbb{P}(R_{n+1} = R_n \,|\, R_n) = \mathbb{P}(A^c_{n+1} \,|\, R_n) = \frac{52-n-R_n}{52-n},$$
pour $n \in \{0, \ldots, 50\}$. On peut voir que $\mathbb{P}(R_{n+1} = j \,|\, R_n) = \mathbb{P}(R_{n+1} = j \,|\, \mathcal{F}_n)$, car la connaissance de $(R_1, \ldots, R_{n-1})$ n'ajoute aucune information supplémentaire sur R_{n+1}, si on connait R_n. Donc
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) &= (R_n - 1)\,\frac{R_n}{52-n} + R_n\,\frac{52-n-R_n}{52-n} \\ &= R_n - \frac{R_n}{52-n}, \qquad n = 0, \ldots, 50.\end{aligned}$$
On obtient
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) &= \frac{1}{52-n-1}\,\mathbb{E}(R_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) \\ &= \frac{1}{52-n-1}\,R_n\,\frac{52-n-1}{52-n} = X_n.\end{aligned}$$
3. Le joueur peut décider de dire la phrase fatidique seulement sur la base des cartes déjà retournées, c'est à dire que $\{\tau = n\}$ est inclus dans $\sigma(R_0, \ldots, R_n) = \mathcal{F}_n$ et τ est donc un temps d'arrêt. Toute stratégie correspond à choisir un tel temps d'arrêt. La probabilité de victoire est
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{\tau+1}) &= \sum_{n=0}^{51} \mathbb{P}(\{\tau = n\} \cap A_{n+1}) = \sum_{n=0}^{51} \mathbb{E}(1_{\{\tau=n\}}\,\mathbb{P}(A_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n)) = \\ &= \sum_{n=0}^{51} \mathbb{E}(1_{\{\tau=n\}}\,X_n) = \mathbb{E}(X_\tau).\end{aligned}$$
Par le théorème d'arrêt, puisque (X_n) est une martingale et τ est un temps d'arrêt borné ($\tau \le 51$ p.s.), alors $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0) = 1/2$. La probabilité de victoire dans ce jeu est donc toujours égale à $1/2$.

Correction de l'exercice 2 1. L'état 0 conduit à tout état $x > 0$ car $Q(0, x) = f(x) > 0$; tout état $x > 0$ conduit à $x-1$ et donc à 0 après x étapes. La chaîne est donc irréductible.

2. Par les définitions, on voit que

$$\mathbb{P}_0(S_1 = n) = \mathbb{P}_0(X_n = 0, X_{n-1} = 1, \dots, X_1 = n-1) = \mathbb{P}_0(X_1 = n-1) = f(n).$$

Donc $\mathbb{P}_0(S_1 < +\infty) = \sum_n f(n) = 1$ et la chaîne est irréductible récurrente.

3. On voit que

$$\sum_x \lambda(x)\, Q(x, y) = f(y+1) \sum_{z=1}^{\infty} f(z) + \sum_{z=y+2}^{\infty} f(z) = \sum_{z=y+1}^{\infty} f(z) = \lambda(y)$$

donc λ est invariante. Toute mesure μ sur $\mathbb{N}$ est invariante si

$$\mu(y) = \sum_x \mu(x)\, Q(x, y) = f(y+1)\, \mu(0) + \mu(y+1),$$

ce qui donne

$$\mu(y) = \mu(0) - \mu(0)(f(y) + f(y-1) + \cdots + f(1)) = \mu(0) \sum_{z=y+1}^{\infty} f(z) = \mu(0)\, \lambda(y).$$

4. (X_n) est récurrente positive ssi $\mathbb{E}_0(S_1) = \sum_n n\, f(n) = m < +\infty$. Il existe une mesure de probabilité invariante ssi λ est normalisable :

$$\sum_x \lambda(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{z=x+1}^{\infty} f(z) = \sum_{z=1}^{\infty} f(z) \sum_{x=0}^{z-1} 1 = \sum_{z=1}^{\infty} z\, f(z) = m,$$

donc ssi $m < +\infty$. On suppose cette condition satisfaite dans la suite de l'exercice et on appelle π la seule mesure de probabilité invariante :

$$\pi(x) = \frac{1}{m} \sum_{z=x+1}^{\infty} f(z), \qquad x \in \mathbb{N}.$$

5. La chaîne est irréductible, récurrente positive et apériodique, car $Q(0, 0) = f(1) > 0$. Donc

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_x(X_n = y) = \pi(y) = \frac{1}{m} \sum_{z=y+1}^{\infty} f(z),$$

pour tous $x, y \in \mathbb{N}$.

6. Soit $u(n) := \mathbb{P}_0(X_n = 0)$. Si $X_0 = X_n = 0$, alors $S_1 \in \{1, \ldots, n\}$ et donc $\{X_0 = X_n = 0\} = \cup_{z \leq n}\{X_0 = X_n = 0,\, S_1 = z\}$. Par la propriété forte de Markov nous obtenons, puisque S_1 est un temps d'arrêt,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0(X_n = 0) &= \sum_{z=1}^{n} \mathbb{P}_0(S_1 = z,\, X_n = 0) = \sum_{z=1}^{n} \mathbb{E}_0\left(1_{(S_1=z)}\, \mathbb{P}_{X_z}(X_{n-z} = 0)\right) \\ &= \sum_{z=1}^{n} \mathbb{P}_0(S_1 = z)\, \mathbb{P}_0(X_{n-z} = 0) = \sum_{z=1}^{n} f(z)\, u(n-z) = f * u(n).\end{aligned}$$

7. Soit $t_i := S_i - S_{i-1}$, $i \geq 1$. On peut voir que $t_{i+1} = S_1 \circ \theta_{S_i}$, c'est à dire le premier temps de retour à 0 après S_i, pour tous $i \geq 0$. Par la propriété forte de Markov, on trouve que la suite $(t_i)_{i\geq 1}$ est sous $\mathbb{P}_0$ une suite iid et

$$\mathbb{P}_0(t_i = n) = \mathbb{P}_0(t_1 = n) = \mathbb{P}_0(S_1 = n) = f(n), \qquad n \geq 1.$$

8. Puisque $S_i = t_1 + \cdots + t_i$ et les (t_i) sont iid avec distribution commune $f(\cdot)$, alors $\mathbb{P}_0(S_i = n) = f^{i*}(n)$, où $f^{i*} = f * \cdots * f$ est la convolution i fois de f pour $i \geq 1$.
9. La suite aléatoire (S_i) décrit tous les temps de retour à 0, donc il est clair que $\{X_n = 0\} = \cup_i\{S_i = n\}$. Puisque les événements $(\{S_i = n\})_i$ sont disjoints, on obtient

$$u(n) = \mathbb{P}_0(X_n = 0) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_0(S_i = n) = \sum_{i=1}^{\infty} f^{i*}(n), \qquad n \geq 1. \tag{2}$$

10. Par le point 5, $u(n) = \mathbb{P}_0(X_n = 0) \to \pi(0) = 1/m$.