EXAMEN 15 décembre 2009
Probabilités approfondies MM011

Durée 3h. Documents interdits

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur E dénombrable avec matrice de transition Q. Soit u une fonction positive bornée sur E telle que, pour un certain $\beta > 0$,

$$Qu(x) = \beta u(x), \qquad \forall x \in E \tag{1}$$

1. Montrer que $Z_n = \beta^{-n}\, u(X_n)$ est une martingale sous $\mathbb{P}_x$ par rapport à la filtration canonique de $(X_n)_{n\geq 0}$ pour tout $x \in E$.
2. Soit T un temps d'arrêt borné. Montrer que

$$u(x) = \mathbb{E}_x\left(\beta^{-T} u(X_T)\right) \tag{2}$$

Soit S_n la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$, $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n Y_i$, avec $(Y_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. et $\mathbb{P}_x(Y_i = 1) = \mathbb{P}_x(Y_i = -1) = 1/2$, $\mathbb{P}_x(S_0 = x) = 1$. Soit $T_R = \inf\{n \geq 0 : |S_n| \geq R\}$, $x, R \in \mathbb{Z}$ et $-R < x < R$.

3. Montrer que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et en donner la matrice de transition. Montrer que T_R est un temps d'arrêt.
4. Montrer que, pour $0 < \lambda < \pi/2$, $V_n := e^{i\lambda S_n}/(\cos\lambda)^n$ est une martingale à valeurs complexes, i.e. $|V_n|$ est intégrable et $\mathbb{E}_x(V_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n) = V_n$ pour tout $n \geq 0$. En déduire que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale, où

$$Z_n = \frac{\cos(\lambda S_n)}{(\cos\lambda)^n}.$$

5. Soit $0 < \lambda < \frac{\pi}{2R}$. Montrer que

$$\mathbb{E}_x\left((\cos\lambda)^{-T_R}\right) \leq \frac{\cos(\lambda x)}{\cos(\lambda R)}. \tag{3}$$

   En déduire que $\mathbb{P}_x(T_R < +\infty) = 1$.
6. Calculer $\mathbb{E}_x(|S_{T_R}|)$, $\mathbb{E}_x(S_{T_R})$ et la loi de S_{T_R} sous $\mathbb{P}_x$.
7. Quelle est la loi de S_{T_R+1} sous $\mathbb{P}_x$?
8. Déduire de la formule (3) qu'il existe $\beta \in]0,1[$ et $C \in]0,+\infty[$ tels que

$$\mathbb{P}_x(T_R \geq n) \leq C\,\beta^n, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Exercice 2. On désire étudier l'évolution du nombre X_n de personnes dans une salle d'attente. On suppose que si k personnes sont dans la salle d'attente avec $k \geq 1$, alors le prochain changement du nombre de personnes dans la salle d'attente correspond à une arrivée avec probabilité $p \in]0,1[$ et à un départ avec probabilité $1-p$. Si $k=0$, le prochain changement correspond à une arrivée.

On décrit ce processus à l'aide d'une suite $(Y_n, n \geq 0)$ de variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $\{-1,1\}$ telles que $\mathbb{P}(Y_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(Y_n = -1)$. Soient $x \in \mathbb{N}$ et $(X_n)_{n\geq 0}$ défini par $X_0 = x$ et, pour $n \geq 1$, on pose

$$X_n = X_{n-1} + Y_n \mathbb{1}_{\{X_{n-1}>0\}} + \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=0\}}.$$

On définit aussi $S_0 = x$ et pour $n \geq 1$, $S_n = S_{n-1} + Y_n$.

1. Montrer que le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ et donner sa matrice de transition. Montrer que la chaîne est irréductible.
2. Montrer par récurrence que p.s. $X_n \geq S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $p > 1/2$. Montrer que p.s. $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ et en déduire que p.s. $\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty$. Dans ce cas, la chaîne est-elle récurrente nulle, récurrente positive ou transiente ?
4. Montrer que si λ est une mesure invariante pour $(X_n)_{n\geq 0}$, alors

$$\lambda(0) = (1-p)\lambda(1), \qquad \lambda(n) = \alpha^{n-1}\lambda(1),\ n \geq 1$$

   où $\alpha = p/(1-p)$. Discuter l'unicité des mesures invariantes.
5. Pour quelles valeurs de p a-t-on une mesure de probabilité invariante pour $(X_n)_{n\geq 0}$? La mesure de probabilité invariante est-elle unique ?
6. On suppose que la probabilité invariante π existe. Dans ce cas, la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est-elle récurrente nulle, récurrente positive ou transiente ? La chaîne est-elle réversible par rapport à π ? Quel est le temps moyen qu'il faut attendre pour retourner à 0 si p.s. $X_0 = 0$?
7. On suppose $p = 1/2$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ a même loi que $(|S_n|)_{n\geq 0}$.

Corrigé

Solution de l'exercice 1.

1. D'abord, $Z_n = \beta^{-n}\, u(X_n)$ est bornée donc intégrable. On a alors $\mathbb{P}_x$-p.s.

$$\mathbb{E}_x(u(X_{n+1}) \,|\, \mathcal{F}_n) = Qu(X_n) = \beta\, u(X_n).$$

   Donc

$$\mathbb{E}_x(\mathbb{Z}_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_x(\beta^{-n-1}\, u(X_{n+1}) \,|\, \mathcal{F}_n) = \beta^{-n}\, u(X_n) = Z_n.$$

2. Soit T un temps d'arrêt borné. Par le Théorème d'arrêt borné (Thm. 4.4.2 du poly) on a

$$\mathbb{E}_x\left(\beta^{-T} u(X_T)\right) = \mathbb{E}_x(Z_T) = \mathbb{E}_x(Z_0) = u(x).$$

3. Si on définit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$, $f(s, y) := s + y$, alors $S_{n+1} = f(S_n, Y_{n+1})$ et le processus $(S_n)_{n\geq 0}$ s'écrit donc comme dans le Théorème 5.3.5 du poly, et on a alors qu'il s'agit bien d'une chaîne de Markov. La matrice de transition est

$$Q(x, y) = \mathbb{P}(f(x, Y_1) = y) = \mathbb{P}(Y_1 = y - x) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1}_{(y-x=1)} + \mathbb{1}_{(y-x=-1)}\right).$$

   Or $\{T_R = n\} = \{|S_0| < R, \dots, |S_{n-1}| < R, |S_n| \geq R\} \in \mathcal{F}_n$.

4. Soient $0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$, $e^{i\lambda x} = \cos(\lambda x) + i \sin(\lambda x)$, $x \in \mathbb{Z}$, et $\beta := \cos\lambda$. On peut remarquer que $|V_n| = (\cos\lambda)^{-n} \in L^1$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x(e^{i\lambda S_{n+1}} \,|\, \mathcal{F}_n) &= e^{i\lambda S_n}\, \mathbb{E}_x(e^{i\lambda Y_{n+1}} \,|\, \mathcal{F}_n) = e^{i\lambda S_n}\, \mathbb{E}_x(e^{i\lambda Y_{n+1}}) \\ &= e^{i\lambda S_n}\, \frac{e^{i\lambda} + e^{-i\lambda}}{2} = e^{i\lambda S_n}\, \cos\lambda = \beta\, e^{i\lambda S_n}.\end{aligned}$$

   Si on définit $V_n' := e^{-i\lambda S_n}/(\cos\lambda)^n$ alors $(V_n')_{n\geq 0}$ est une martingale et $Z_n = (V_n + V_n')/2$ l'est aussi.

5. Soit $0 < \lambda < \frac{\pi}{2R}$ et $-R < x < R$. On considère le temps d'arrêt borné $T_R \wedge n$ et on a alors par le Théorème d'arrêt borné

$$\mathbb{E}_x\left(Z_{T_R\wedge n}\right) = \mathbb{E}_x\left(\frac{\cos(\lambda S_{T_R\wedge n})}{(\cos\lambda)^{T_R\wedge n}}\right) = Z_0 = \cos(\lambda x).$$

   Or, on a par les définitions que $|S_{T_R\wedge n}| \leq R$. Puisque la fonction $\cos(\cdot)$ est paire et décroissante positive sur $[0, \pi/2[$, et puisque $\lambda R \in]0, \pi/2[$, on obtient que

$$\cos(\lambda S_{T_R\wedge n}) = \cos(\lambda |S_{T_R\wedge n}|) > \cos(\lambda R)$$

   et donc

$$\cos(\lambda x) = \mathbb{E}_x\left(\frac{\cos(\lambda S_{T_R\wedge n})}{(\cos\lambda)^{T_R\wedge n}}\right) \geq \mathbb{E}_x\left(\frac{\cos(\lambda R)}{(\cos\lambda)^{T_R\wedge n}}\right)$$

et finalement par convergence monotone

$$\mathbb{E}_x\left((\cos\lambda)^{-T_R}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x\left(\frac{1}{(\cos\lambda)^{T_R\wedge n}}\right) \le \frac{\cos(\lambda x)}{\cos(\lambda R)}.$$

Donc p.s. $(1/\cos\lambda)^{T_R} > 0$ et, puisque $\cos\lambda \in]0,1[$, cela veut dire que p.s. $T_R < +\infty$.

6. La loi de S_{T_R} est donnée par la ruine du joueur, voir le poly section 4.10 : $\mathbb{P}_x(S_{T_R} = R) = \frac{R-x}{2R}$, $\mathbb{P}_x(S_{T_R} = -R) = \frac{R+x}{2R}$. On peut voir cela en remarquant que S_n est une martingale, et donc que

$$x = \mathbb{E}_x(S_0) = \mathbb{E}_x(S_{T_R\wedge n}) \to \mathbb{E}_x(S_{T_R})$$

par convergence dominée, car $|S_{T_R\wedge n}| \le R$ pour tout $n \ge 0$. Or

$$\mathbb{E}_x(S_{T_R}) = R\,\mathbb{P}_x(S_{T_R} = R) - R\,\mathbb{P}_x(S_{T_R} = -R),$$

$$\mathbb{P}_x(S_{T_R} = R) + \mathbb{P}_x(S_{T_R} = -R) = 1$$

et ces deux équations ont comme seule solution les deux valeurs données ci-dessus.

7. Par la propriété de Markov forte on a que, puisque $\mathbb{P}_x(T_R < +\infty) = 1$,

$$\mathbb{P}_x(S_{T_R+1} = y) = \mathbb{E}_x(\mathbb{P}_{S_{T_R}}(S_1 = y)) = \frac{R-x}{2R}\,\mathbb{P}_R(S_1 = y) + \frac{R+x}{2R}\,\mathbb{P}_{-R}(S_1 = y).$$

Or $\mathbb{P}_z(S_1 = y) = \frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{(|z-y|=1)}$ et donc

$$\mathbb{P}_x(S_{T_R+1} = R+1) = \mathbb{P}_x(S_{T_R+1} = R-1) = \frac{1}{2}\,\frac{R-x}{2R},$$

$$\mathbb{P}_x(S_{T_R+1} = -R+1) = \mathbb{P}_x(S_{T_R+1} = -R-1) = \frac{1}{2}\,\frac{R+x}{2R},$$

$$\mathbb{P}_x(S_{T_R+1} = y) = 0, \qquad \forall\, y \notin \{R+1, R-1, -R+1, -R-1\}.$$

8. Soit $0 < \lambda < \frac{\pi}{2R}$, $-R < x < R$ et $\beta := \cos\lambda \in]0,1[$. Par l'inégalité de Markov et par (3)

$$\mathbb{P}_x(T_R \ge n) = \mathbb{P}_x\left(\beta^{-T_R} \ge \beta^{-n}\right) \le \frac{\mathbb{E}_x\left(\beta^{-T_R}\right)}{\beta^{-n}} \le C\beta^n$$

où $C := \frac{\cos(\lambda x)}{\cos(\lambda R)}$.

Solution de l'exercice 2.

1. Soit $f : \mathbb{N} \times \{1, -1\} \mapsto \mathbb{N}$ définie par
$$f(x, z) := x + z\mathbb{1}_{\{x>0\}} + \mathbb{1}_{\{x=0\}}.$$
On peut donc écrire $X_n = f(X_{n-1}, Y_n)$ et par le Théorème 5.3.5 du poly le processus $(X_n)_n$ est bien une chaîne de Markov. Sa matrice de transition est
$$Q(x, y) = \mathbb{P}(f(x, Y_1) = y) = \mathbb{1}_{\{x>0\}} \left(p\mathbb{1}_{(y-x=1)} + (1-p)\mathbb{1}_{(y-x=-1)}\right) + \mathbb{1}_{\{x=0,y=1\}}.$$
La chaîne est clairement irréductible car avec probabilité positive on peut aller de tout $x \geq 0$ à $y = x + 1$ et de tout $x > 0$ à $y = x - 1$.
2. On a $X_0 = x = S_0$. Si p.s. $X_{n-1} \geq S_{n-1}$ alors p.s.
$$X_n = X_{n-1} + Y_n\mathbb{1}_{\{X_{n-1}>0\}} + \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=0\}} \geq S_{n-1} + Y_n = S_n.$$
Puisque ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, par intersection dénombrable on a que $\mathbb{P}(X_n \geq S_n, \forall n \in \mathbb{N}) = 1$.
3. Si $p > 1/2$ alors p.s. $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ par la loi des grands nombres, car p.s.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}(Y_1) = 2p - 1 > 0.$$
Puisque p.s. $X_n \geq S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient que p.s. $\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty$. La chaîne étant irréductible, tous les états ont le même caractère, soit tous récurrents soit tous transients. Puisque X_n diverge vers $+\infty$, il visite tout état $y \in \mathbb{N}$ p.s. un nombre fini de fois. Ceci est possible seulements si les états sont transients.
4. On a que λ est une mesure invariante pour $(X_n)_{n\geq0}$ ssi $\lambda Q = \lambda$. Pour $x = 0$ on a que $Q(y, 0) > 0$ seulement pour $y = 1$ et donc
$$\lambda(0) = \lambda(1)\, Q(1, 0) = \lambda(1)\,(1 - p).$$
Pour $x > 0$ on a que $Q(y, x) > 0$ seulement pour $y \in \{x + 1, x - 1\}$ et donc
$$\lambda(x) = \lambda(x - 1)\, p + \lambda(x + 1)\,(1 - p).$$
Pour $x = 1$ on a
$$\lambda(1) = \lambda(0)\, p + \lambda(2)\,(1 - p) = \lambda(1)\,(1 - p) + \lambda(2)\,(1 - p)$$
et on en déduit
$$\lambda(2) = \frac{p}{1-p}\,\lambda(1).$$
Par récurrence si $\lambda(n) = \alpha^{n-1}\lambda(1)$ pour $\alpha = p/(1 - p)$ et $n \geq 1$ alors
$$\lambda(n) = \lambda(n - 1)\, p + \lambda(n + 1)\,(1 - p) \Longrightarrow$$
$$\lambda(n + 1) = \lambda(1)(\alpha^{n-1} - p\alpha^{n-2})/(1 - p) = \alpha^n\lambda(1).$$
Par ce calcul on voit que les mesures invariantes sont uniques à une constante multiplicative près (dans l'expression trouvée égale à $\lambda(1)$).

5. Par la question précédente, une mesure de probabilité invariante existe ssi on peut normaliser λ, c'est à dire ssi

$$\lambda(\mathbb{N}) = \lambda(1)\left(1 - p + \sum_{n\geq 1}\alpha^{n-1}\right) < +\infty,$$

donc ssi $\alpha < 1 \iff p < 1/2$. Dans ce cas on a donc que

$$\pi(n) = \frac{\lambda(n)}{\lambda(\mathbb{N})}, \qquad n \geq 0,$$

est la seule mesure invariante de probabilité, car les mesures invariantes sont uniques à une constante multiplicative près.

6. Soit $p < 1/2$. L'existence d'une mesure de probabilité invariante implique que la chaîne est récurrente positive. Pour la réversibilité il faut vérifier

$$\pi(x)\,Q(x,y) = \pi(y)\,Q(y,x), \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{N}.$$

Il suffit de considérer $x > 0$ et $y \in \{x+1, x-1\}$ ou $x = 0$ et $y = 1$, car dans tous les autres cas $Q(x,y) = Q(y,x) = 0$. Si $x \geq 0$ et $y = x+1$ alors

$$\pi(x)\,Q(x,x+1) = \frac{\alpha^{x-1}}{\lambda(\mathbb{N})}\,p = \frac{\alpha^{x}}{\lambda(\mathbb{N})}\,(1-p) = \pi(x+1)\,Q(x+1,x).$$

Si $x > 0$ et $y = x-1$ alors

$$\pi(x)\,Q(x,x-1) = \frac{\alpha^{x-1}}{\lambda(\mathbb{N})}\,(1-p) = \frac{\alpha^{x-2}}{\lambda(\mathbb{N})}\,p = \pi(x-1)\,Q(x-1,x).$$

On a donc bien la réversibilité de π. Le temps moyen de retour à 0 partant de 0 est $1/\pi(0)$.

7. Soit $f(x) := \mathbb{1}_{(|x|=y)}$. On rappelle que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov avec matrice de transition

$$P(x,y) := \frac{1}{2}\left(\mathbb{1}_{(y-x=1)} + \mathbb{1}_{(y-x=-1)}\right), \qquad x,y \in \mathbb{Z}.$$

Par la propriété de Markov de $(S_n)_{n\geq 0}$, pour $y \geq 0$

$$\mathbb{P}(|S_{n+1}| = y \,|\, \mathcal{F}_n) = Pf(S_n) = \frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{(|S_n|\neq 0, |y-|S_n||=1)} + \mathbb{1}_{(|S_n|=0, y=1)}.$$

Puisque l'expression à droite dépend uniquement de $|S_n|$, on obtient que $(|S_n|)_{n\geq 0}$ est une suite markovienne. En outre, pour $p = 1/2$ la matrice de transition de $(|S_n|)_{n\geq 0}$ est la même que celle de $(X_n)_{n\geq 0}$. Si les deux chaînes de Markov ont donc la même loi initiale, elles ont la même loi comme processus.