EXAMEN 11 janvier 2007
Probabilités approfondies MM011

Durée 3 heures. Documents interdits

Exercice 1 On considère une chaîne de Markov (X_n) dans $E = \{1, 2, 3\}$ avec matrice de transition

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les classes de récurrence/transience ?
2. Calculer une mesure de probabilité invariante et dire si elle est unique et si elle est réversible.
3. Calculer pour tout $x \in E$ le temps moyen de retour à x, $\mathbb{E}_x(S_x)$.
4. Calculer la période de tout $x \in E$. Quelle est la limite des probabilités de transition $Q^n(x, y)$, quand $n \to \infty$?

Exercice 2 Soient $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite iid de variables de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ et $X_0 := 0$, $X_n := Y_1 + \cdots + Y_n$. Remarquer que $X_{n+1} \geq X_n$ p.s. pour tout n. Soit pour tout $y \in \mathbb{N}$ le temps d'arrêt $T_y := \inf\{n \geq 0 : X_n = y\}$ $(\inf \emptyset := \infty)$.

1. Montrer, à l'aide de la loi des grands nombres, que $\lim_n X_n = +\infty$ p.s. et en déduire que $\mathbb{P}(T_y < +\infty) = 1$.
2. Montrer que $M_n := X_n - np$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ engendrée par (X_n).
3. Calculer $\mathbb{E}(T_y)$, en utilisant la martingale arrêtée $(M_{n \wedge T_y})$.

Soit $N_y := \sum_{k=0}^{\infty} 1_{(X_k = y)}$ le nombre de visites de (X_n) à $y \in \mathbb{N}$.

4. Calculer $1_{(X_k=y)}$ pour $k < T_y$, $T_y \leq k < T_{y+1}$ et $k \geq T_{y+1}$, respectivement. En déduire que $N_y = T_{y+1} - T_y$ p.s. et la valeur de $\mathbb{E}(N_y)$.

On remarque que (X_n) est une marche aléatoire avec matrice de transition Q donnée par : $Q(x, x) = 1 - p$, $Q(x, x+1) = p$, $x \in \mathbb{N}$ (on ne demande pas de le prouver). On peut supposer que la chaîne (X_n) est donnée sous forme canonique.

5. Calculer la loi de X_n et la loi de T_1.
6. Prouver, à l'aide de la loi de Markov forte et du point 4, que N_y a même loi que T_1.
7. Calculer la loi de T_y.

(tourner la page $\longrightarrow$)

Exercice 3 On considère un jeu de hasard entre un joueur et le croupier d'un casino. Le capital total en jeu est 1 : après l'énième partie le capital du joueur est $X_n \in [0,1]$ et le capital du croupier est $1 - X_n$. Au début le capital du joueur est une constante $X_0 = p \in]0,1[$ et le capital du croupier est $1-p$.

La règle du jeu est que, après les n premières parties, la probabilité pour le joueur de gagner l'$(n+1)$-ième partie est X_n, et la probabilité de perdre est $1 - X_n$; si le joueur gagne, il obtient la moitié du capital du croupier ; s'il perd, il cède la moitié de son capital au croupier.

Ce qui se traduit en formule : pour toute $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ borélienne bornée,

$$\mathbb{E}\left(f(X_{n+1}) \,|\, \mathcal{F}_n\right) \;=\; X_n \cdot f\left(X_n + \frac{1-X_n}{2}\right) + (1-X_n)\cdot f\left(\frac{X_n}{2}\right) \qquad (1)$$

où $(\mathcal{F}_n)$ est la filtration naturelle de (X_n).

1. Prouver que (X_n) est une martingale.
2. Prouver que X_n converge p.s. et dans L^2 vers une variable Z.
3. Prouver que $\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = \mathbb{E}(3X_n^2 + X_n)/4$. En déduire que $\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(Z) = p$.
4. Prouver que toute variable aléatoire W, telle que $0 \le W \le 1$ et $\mathbb{E}(W(1-W)) = 0$, est une variable de Bernoulli. En déduire la loi de Z.
5. Pour tout $n \ge 0$, soit $Y_n := 2X_{n+1} - X_n$. Calculer, à l'aide de la formule (1), la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $\mathcal{F}_n$. En déduire que

   $$\mathbb{P}(Y_n = 0 \,|\, \mathcal{F}_n) = 1 - X_n, \qquad \mathbb{P}(Y_n = 1 \,|\, \mathcal{F}_n) = X_n,$$

   et en déduire la loi de Y_n.
6. Considérer les événements $G_n := \{Y_n = 1\}$, $P_n := \{Y_n = 0\}$. Prouver que $Y_n \to_n Z$ p.s. et en déduire que

   $$\mathbb{P}\left(\liminf_n G_n\right) = p, \qquad \mathbb{P}\left(\liminf_n P_n\right) = 1-p.$$

   La suite (Y_n) est-elle indépendante ?
7. Quelle est l'interprétation des résultats des points 4, 5 et 6 en termes de victoire/perte du joueur ?

Corrigé (MM011 Probabilités approfondies, 11 janvier 2007)

Correction de l'exercice 1

1. 1 conduit à 2, 2 conduit à 3 et 3 conduit à 1, donc x conduit à y pour tous $x, y \in E$ et la chaîne est irréductible. Puisque E est fini il y a au moins un état récurrent et les états sont donc tous récurrents.
2. Une mesure de probabilité invariante est $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ avec $\pi_i \geq 0$, $\sum_i \pi_i = 1$ et $\pi Q = \pi$. On pose le système
$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3), \qquad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$
et on trouve que $\pi = (\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9})$. Puisque ce système a une seule solution, il y a une seule mesure de probabilité invariante. L'unicité est aussi une conséquence de l'irréductibilité.
La mesure invariante π n'est pas réversible : $\pi_2\, Q(2,3) = \frac{1}{9} \neq 0 = \pi_3\, Q(3,2)$.
3. Pour tout $x \in E$, $\mathbb{E}_x(S_x) = \frac{1}{\pi_x}$, donc $\mathbb{E}_1(S_1) = \frac{9}{4}$, $\mathbb{E}_2(S_2) = \frac{9}{2}$ et $\mathbb{E}_3(S_3) = \frac{9}{3} = 3$.
4. Par l'irréductibilité, la période est la même pour tout $x \in E$. Pour $x = 1$ on voit que $Q^2(1,1) > 0$ et $Q^3(1,1) > 0$; le p.g.c.d. de $\{2,3\}$ étant 1, on obtien que la chaîne est apériodique. Donc la limite des probabilités de transition $Q^n(x,y)$ quand $n \to \infty$ est π_y.

Correction de l'exercice 2

1. La suite (Y_n) est iid et $Y_n \in L^1$, avec $\mathbb{E}(Y_n) = p$. Par la loi des grands nombres, $\lim_n \frac{X_n}{n} = p > 0$ p.s., donc $\lim_n X_n = +\infty$ p.s.. Puisque $X_n - X_{n-1} \in \{0,1\}$ pour tout n, $X_0 = 0$ et $\lim_n X_n = +\infty$ p.s., on obtient que (X_n) visite tout $y \in \mathbb{N}$ et donc $T_y < +\infty$ p.s..
2. $M_n := X_n - np = \sum_{i=1}^n (Y_i - p)$ est une martingale, car $(Y_i - p)_i$ est une suite iid centrée.
3. Puisque $n \wedge T_y$ est un temps d'arrêt borné, on a $\mathbb{E}(M_{n\wedge T_y}) = \mathbb{E}(M_0) = 0$, donc $\mathbb{E}(n \wedge T_y) = \mathbb{E}(X_{n\wedge T_y})/p$. Puisque $T_y < +\infty$ et $|X_{n\wedge T_y}| \leq y$ p.s., on a par convergence dominée : $\lim_n \mathbb{E}(X_{n\wedge T_y}) = \mathbb{E}(X_{T_y}) = y$. Par convergence monotone $\lim_n \mathbb{E}(n \wedge T_y) = \mathbb{E}(T_y)$. Donc
$$\mathbb{E}(T_y) = \frac{y}{p}. \qquad (2)$$

4. Puisque $X_{n+1} \geq X_n$ p.s. pour tout n, on a

$$1_{(X_k=y)} = 0, \qquad \text{si} \quad k < T_y \quad \text{ou} \quad k \geq T_{y+1}, \tag{3}$$
$$1_{(X_k=y)} = 1, \qquad \text{si} \quad T_y \leq k < T_{y+1}.$$

Donc

$$N_y = \sum_{i=T_y}^{T_{y+1}-1} 1 = T_{y+1} - T_y, \quad \mathbb{E}(N_y) = \mathbb{E}(T_{y+1} - T_y) = \frac{y+1}{p} - \frac{y}{p} = \frac{1}{p}.$$

5. X_n est une variable binomiale avec paramètres (n,p). T_1 est une variable géométrique avec paramètre p, car pour tout $n \geq 1$

$$\mathbb{P}(T_1 = k) = \mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_{k-1} = 0,\, X_k = 1)$$
$$= \mathbb{P}(Y_1 = \cdots = Y_{k-1} = 0,\, Y_k = 1) = (1-p)^{k-1}\, p.$$

6. On veut calculer $\mathbb{P}(N_y = k)$. Par le point 4 on a

$$N_y = T_{y+1} - T_y = T_{y+1} \circ \theta_{T_y}.$$

Par la propriété de Markov forte :

$$\mathbb{P}(N_y = k) = \mathbb{P}(T_{y+1} \circ \theta_{T_y} = k) = \mathbb{E}(\mathbb{P}_{X_{T_y}}(T_{y+1} = k))$$
$$= \mathbb{P}_y(T_{y+1} = k) = \mathbb{P}_0(T_1 = k) = \mathbb{P}(T_1 = k).$$

7. Soit $y \geq 2$ et $k \geq y$. On a

$$\mathbb{P}(T_y = k) = \mathbb{P}(X_{k-1} = y-1,\ X_k = y) = \mathbb{P}(X_{k-1} = y-1,\ Y_k = 1)$$
$$= \binom{k-1}{y-1}\ p^y (1-p)^{k-y}.$$

Correction de l'exercice 3 On remarque que pour toute $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ borélienne bornée et $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}\left(f(X_{n+1}) \,|\, \mathcal{F}_n\right) \;=\; X_n \cdot f\left(\frac{1+X_n}{2}\right) + (1-X_n) \cdot f\left(\frac{X_n}{2}\right). \tag{4}$$

1. Si on pose $f(x) = x$ dans (4), on obtient

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right) \;=\; X_n \,\frac{1+X_n}{2} + (1-X_n)\,\frac{X_n}{2} = X_n.$$

2. $X_n \in [0,1]$ p.s. pour tout n, donc (X_n) est une martingale bornée dans L^2 et, par le théorème de convergence des martingales, X_n converge p.s. et dans L^2 vers une variable $Z \in [0,1]$.
3. Si on pose $f(x) = x^2$ dans (4) et on prend l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) \;=\; \mathbb{E}\left(X_n\,\frac{(1+X_n)^2}{4} \;+\; (1-X_n)\,\frac{X_n^2}{4}\right) \;=\; \frac{\mathbb{E}\left(X_n + 3X_n^2\right)}{4}.$$

Quand $n \to \infty$, par convergence dominée on trouve :

$$\mathbb{E}\left(Z^2\right) \;=\; \frac{\mathbb{E}\left(Z + 3Z^2\right)}{4} \;\Longrightarrow\; \mathbb{E}\left(Z^2\right) \;=\; \mathbb{E}\left(Z\right) \;=\; \mathbb{E}(X_0) \;=\; p.$$

4. Pour une telle W, on a $W(1-W) \geq 0$ et $\mathbb{E}(W(1-W)) = 0$, donc $W(1-W) = 0$ p.s. et donc $W \in \{0,1\}$ p.s.. Or $\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(Z)$ implique $\mathbb{E}(Z(1-Z)) = 0$. Puisque $Z \in [0,1]$ comme limite de $X_n \in [0,1]$, on obtient que Z est une variable de Bernoulli avec paramètre $\mathbb{E}(Z) = p$.

Il faut remarquer que l'hypothèse $W \in [0,1]$ est importante : si Y est une variable exponentielle de paramètre 1 ou une variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors $\mathbb{E}(Y(1-Y)) = 0$ mais Y n'est pas de Bernoulli.
5. Par (4) on voit que :

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2}\;\middle|\;\mathcal{F}_n\right) = X_n, \quad \mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2}\;\middle|\;\mathcal{F}_n\right) \;=\; 1 - X_n$$

et on obtient que la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $\mathcal{F}_n$ est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_{n+1} \in dt \,|\, \mathcal{F}_n\right) &= \mathbb{P}\left(X_{n+1} \in dt \,|\, X_n\right)\\ &= X_n\,\delta_{\frac{1+X_n}{2}}(dt) \;+\; (1-X_n)\,\delta_{\frac{X_n}{2}}(dt).\end{aligned}$$

On en déduit facilement que la loi conditionnelle de Y_n sachant $\mathcal{F}_n$ est la loi d'une variable de Bernoulli avec paramètre X_n. Donc

$$\mathbb{P}(Y_n = 0) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(Y_n = 0 \,|\, \mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(1 - X_n) = 1 - p,$$

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(Y_n = 1 \,|\, \mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(X_n) = p,$$

et Y_n est une variable de Bernoulli avec paramètre p.

6. Puisque $X_n \to Z$ p.s., $Y_n = 2X_{n+1} - X_n \to 2Z - Z = Z$ p.s.. Or, Y_n prend seulement les valeurs 0 et 1 p.s.. Donc p.s. il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ aléatoire tel que
$$Y_n = Z, \qquad \forall\, n \geq n_0.$$
Donc $\liminf_n G_n = \{Z = 1\}$ et $\liminf_n P_n = \{Z = 0\}$.
On peut voir que la suite (Y_n) n'est pas indépendante de plusieurs façons. Par exemple, si (Y_n) est indépendante, puisque $\sum_n \mathbb{P}(Y_n = 1) = \sum_n p = +\infty$, alors par le deuxième Lemme de Borel-Cantelli on a $\mathbb{P}(\limsup_n\{Y_n = 1\})$; mais Y_n converge p.s. et donc $\lim_n Y_n = 1$ p.s., contre le résultat du point 4. On peut aussi remarquer que la limite Z n'est pas une variable constante p.s. (loi 0-1). On peut aussi calculer explicitement :
$$\mathbb{P}(Y_0 = 1, Y_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_0 = 1)\,\mathbb{P}(Y_1 = 1 \,|\, Y_0 = 1) = p \cdot \frac{1+p}{2}$$
qui est différent de $\mathbb{P}(Y_0 = 1)\,\mathbb{P}(Y_1 = 1) = p^2$.
7. La variable Y_n est p.s. l'indicatrice de l'événement $G_n = \{$le joueur gagne l'$(n+1)$-ième partie$\}$. À chaque partie le joueur a probabilité p de gagner et $1-p$ de perdre. Presque sûrement, après un certain nombre de parties, la situation se stabilisera : soit le joueur gagnera toutes les parties successives, soit il les perdra toutes. Si le jeu continue indéfiniment, à la limite le jouer gagnera le capital entier ou il perdra tout ; le premier événement a probabilité p et le second $1-p$.