EXAMEN 8 juin 2009
Probabilités approfondies MM011

Durée 3 heures. Documents interdits

Exercice 1 Soit Q une matrice de transition sur un espace dénombrable d'états E et soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov canonique associée. Soit $y \in E$ et

$$S_y = \inf\{n \geq 1 : X_n = y\}, \qquad T_y = \inf\{n \geq 0 : X_n = y\},$$

avec la convention usuelle $\inf \emptyset = +\infty$. On pose

$$\begin{cases} \alpha_0(x) = \mathbb{P}_x\left(S_y < \infty\right) = \mathbb{P}_x\left(\bigcup_{n\geq 1}\{X_n = y\}\right), & x \neq y, \\ \alpha_0(y) = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathbb{P}_x$-p.s. $S_y = 1 + T_y \circ \theta$ pour tout $x \in E$, où θ est l'opérateur de translation.
2. Montrer que α_0 est solution de l'équation

$$\begin{cases} \sum_{z\in E} Q(x,z)\,\alpha(z) = \alpha(x), & x \neq y, \\ \alpha(y) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

3. Montrer que si l'on pose

$$\tilde{\alpha}(x) = \mathbb{P}_x\left(S_y < \infty\right), \qquad \forall\, x \in E,$$

alors $\tilde{\alpha}$ satisfait l'inégalité

$$\sum_{z\in E} Q(x,z)\,\tilde{\alpha}(z) \leq \tilde{\alpha}(x), \qquad \forall\, x \in E. \tag{2}$$

4. En déduire que si $\{\alpha(x) = 1,\ \forall\, x \in E\}$ est la seule solution de l'équation (1), alors y est un état récurrent.

(Tourner la page $\longrightarrow$)

Exercice 2 Soit $(Z_n)_n$ une suite i.i.d. telle que $\mathbb{P}(Z_n = 1) = \mathbb{P}(Z_n = -1) = 1/(2n)$ et $\mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - 1/n$. Soit $\mathcal{F}_n := \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$. On pose $X_0 = 0$ puis

$$X_n = Z_n \, \mathbb{1}_{(X_{n-1}=0)} + n|Z_n| \, X_{n-1} \, \mathbb{1}_{(X_{n-1} \neq 0)}, \qquad n \geq 1.$$

1. Montrer que $X_n \in \mathbb{Z}$ et $|X_n| \leq n!$ p.s., puis que $(X_n)_n$ est une martingale.
2. Calculer $\mathbb{P}(X_n = 0)$ et discuter la convergence en probabilité de $(X_n)_n$.
3. Calculer $\mathbb{P}(Z_n \neq 0$ pour un nombre infini de $n)$ et discuter la convergence p.s. de $(X_n)_n$.
4. Donner une formule de récurrence pour $\mathbb{E}(|X_n|)$ et en déduire la limite de $\mathbb{E}(|X_n|)$ quand $n \to +\infty$.
5. Commenter les relations entre 2, 3, 4 et le théorème de convergence des martingales.

Exercice 3 On considère l'évolution du capital d'une assurance au cours du temps. Soit $S_0 = x > 0$, le capital initial, $c > 0$ le montant des revenus des cotisations par an et X_n le coût des dommages pour l'année n. Le capital à la fin de l'année n est donc $S_n = x + nc - \sum_1^n X_k$. L'assurance est dite ruinée si son capital devient négatif, i.e. si $\tau = \inf\{k \geq 0; S_k < 0\}$ est fini.

On suppose $(X_k)_k$ i.i.d. avec $\mathbb{E}(e^{\lambda X_k}) < \infty$, $\forall \lambda > 0$. Le but ici est de majorer la probabilité de ruine $\mathbb{P}(\tau < \infty)$. On pose $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Vérifier que $\mathbb{E}(X_1) > c$ implique $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$.
2. On suppose dorénavant que $\mathbb{E}(X_1) < c$ et $\mathbb{P}(X_1 > c) > 0$. Soit $\varphi(\lambda) := \mathbb{E}(e^{\lambda(X_1 - c)})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\varphi'' > 0$, $\varphi'(0) < 0$ et
$$\lim_{\lambda \to +\infty} \varphi(\lambda) = +\infty.$$
Dessiner le graphe de φ et montrer qu'il existe un et un seul $\lambda_0 > 0$ tel que $\mathbb{E}(e^{\lambda_0 X_1}) = e^{\lambda_0 c}$.
3. Montrer que $V_n = \exp(-\lambda_0 S_n + \lambda_0 x)$ est une martingale positive.
4. Pour $N \geq 1$ montrer que
$$\mathbb{E}(V_N \, \mathbb{1}_{(\tau \leq N)}) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}(V_k \, \mathbb{1}_{(\tau = k)}) \geq e^{\lambda_0 x} \, \mathbb{P}(\tau \leq N).$$
5. En déduire que $\mathbb{P}(\tau < \infty) \leq e^{-\lambda_0 x}$.

Corrigé (MM011 Probabilités approfondies, 8 juin 2009)

Correction de l'exercice 1 Soit Q une matrice de transition sur un espace dénombrable d'états E et soit $(X_n, n \in N)$ la chaîne de Markov canonique associée. Soit $y \in E$ et

$$S_y = \inf\{n \geq 1 : X_n = y\}, \qquad T_y = \inf\{n \geq 0 : X_n = y\}.$$

On pose

$$\begin{aligned}
\alpha_0(x) &= \mathbb{P}_x(S_y < \infty) = \mathbb{P}_x\left(\bigcup_{n\geq 1}\{X_n = y\}\right), \qquad x \neq y, \\
\alpha_0(y) &= 1.
\end{aligned}$$

1. Il est clair que

$$S_y = \inf\{n \geq 1 : X_n = y\} = 1 + \inf\{n \geq 0 : X_{n+1} = y\} = 1 + T_y \circ \theta.$$

2. Si $x = y$ alors l'équation est vraie par hypothèse. Pour $x \neq y$ on remarque que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(S_y < \infty) = \mathbb{P}_x(1 + T_y \circ \theta < \infty) &= \mathbb{P}_x(T_y \circ \theta < \infty) = \mathbb{E}_x(\mathbb{P}_{X_1}(T_y < \infty)) \\
&= \sum_{z \in E} Q(x,z)\, \mathbb{P}_z(T_y < \infty).
\end{aligned}$$

   Or si $z = y$ alors $\mathbb{P}_y(T_y < \infty) = 1$ et si $z \neq y$ alors $\mathbb{P}_z(T_y < \infty) = \mathbb{P}_z(S_y < \infty)$. Donc pour $x \neq y$

$$\begin{aligned}
\alpha_0(x) = \mathbb{P}_x(S_y < \infty) &= \sum_{z \in E} Q(x,z)\left[\mathbb{P}_z(S_y < \infty)\, \mathbb{1}_{(z \neq y)} + 1 \cdot \mathbb{1}_{(z=y)}\right] \\
&= \sum_{z \in E} Q(x,z)\, \alpha_0(z).
\end{aligned}$$

3. Par la même raison

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}(x) = \mathbb{P}_x(S_y < \infty) &= \sum_{z \in E} Q(x,z)\, \mathbb{P}_z(T_y < \infty) \\
&= \sum_{z \neq y} Q(x,z)\, \mathbb{P}_z(T_y < \infty) + Q(x,y) \geq \sum_{z \in E} Q(x,z)\, \tilde{\alpha}(z).
\end{aligned}$$

4. On rappelle que y est récurrent ssi $\mathbb{P}_y(S_y < \infty) = 1$. Si $\{\alpha(x) = 1,\ \forall\, x \in E\}$ est la seule solution de l'équation (1), alors

$$P_x(S_y < \infty) = 1, \qquad \forall\, x \neq y.$$

Si on considère (2) pour $x = y$ alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_y(S_y < \infty) \geq \sum_{z \in E} Q(y,z)\,\mathbb{P}_z(S_y < \infty) &= \sum_{z \neq y} Q(y,z) \; + Q(y,y)\,\mathbb{P}_y(S_y < \infty) \\ &= (1 - Q(y,y)) + Q(y,y)\,\mathbb{P}_y(S_y < \infty).\end{aligned}$$

Or, si $Q(y,y) = 1$ alors l'état y est absorbant et donc récurrent. Si $Q(y,y) < 1$ alors

$$(1 - Q(y,y))\mathbb{P}_y(S_y < \infty) \geq (1 - Q(y,y)) \Longrightarrow \mathbb{P}_y(S_y < \infty) \geq 1,$$

c'est à dire $\mathbb{P}_y(S_y < \infty) = 1$.

Correction de l'exercice 2 Soit $(Z_n)_n$ une suite i.i.d. telle que $\mathbb{P}(Z_n = 1) = \mathbb{P}(Z_n = -1) = 1/(2n)$ et $\mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - 1/n$. Soit $\mathcal{F}_n := \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$. On pose $X_1 = Z_1$ puis

$$X_n = Z_n\,\mathbb{1}_{(X_{n-1}=0)} + n|Z_n|\,X_{n-1}\,\mathbb{1}_{(X_{n-1}\neq 0)}.$$

1. On a $|X_1| = |Z_1| \leq 1$, et par récurrence $|X_n| \leq n|Z_n X_{n-1}| \leq n|X_{n-1}| \leq n!$.
2. On a $\{X_n = 0\} = \{Z_n = 0\}$ et donc $\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - 1/n$. On obtient pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_n| \neq 0) \leq \frac{1}{n} \to 0,$$

   donc X_n converge vers 0 en probabilité.
3. On a $\mathbb{P}(Z_n \neq 0) = 1/n$ et $\sum_n \mathbb{P}(Z_n \neq 0) = +\infty$. Puisque les événements $\{Z_n \neq 0\}$ sont indépendants, par le lemme de Borel Cantelli on a $\mathbb{P}(\limsup_n \{Z_n \neq 0\}) = 1$. Il y a donc p.s. une suite n_k telle que $|Z_{n_k}| = 1$ et donc $|X_{n_k}| \geq |Z_{n_k}| = 1$. Il s'en suit que p.s. X_n ne converge pas vers 0, qui est la limite en probabilité.
4. On a

$$|X_n| = |Z_n|\,\mathbb{1}_{(X_{n-1}=0)} + n|Z_n|\,|X_{n-1}|\,\mathbb{1}_{(X_{n-1}\neq 0)} = |Z_n|\left(\mathbb{1}_{(X_{n-1}=0)} + n\,|X_{n-1}|\right),$$

   et ainsi

$$\mathbb{E}(|X_n|) = \mathbb{E}\left(|Z_n|\left(\mathbb{1}_{(X_{n-1}=0)} + n\,|X_{n-1}|\right)\right).$$

   Par indépendance de Z_n de $\mathcal{F}_{n-1}$ on a

$$\mathbb{E}(|X_n|) = \mathbb{E}\left(|Z_n|\right)\,\left(\mathbb{P}(X_{n-1} = 0) + n\,\mathbb{E}(|X_{n-1}|)\right).$$

On a prouvé ci-dessus que $\mathbb{P}(X_{n-1} = 0) = \mathbb{P}(Z_{n-1} = 0) = 1 - 1/(n-1)$. Puisque $\mathbb{E}(|Z_n|) = 1/n$ on obtient

$$\mathbb{E}(|X_n|) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n-1}\right) + \mathbb{E}(|X_{n-1}|).$$

Donc pour $n \geq 2$

$$\mathbb{E}(|X_n|) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k-1}\right).$$

On peut remarquer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|X_n|) = +\infty,$$

car $1/k$ n'est pas sommable et $1/k^2$ est sommable sur $\mathbb{N}^*$.

5. La convergence p.s. implique la convergence en probabilité, pas l'inverse. Le théorème de convergence des martingales ne s'applique pas car $\mathbb{E}(|X_n|)$ n'est pas borné.

Correction de l'exercice 3

1. Si $\mathbb{E}(X_1) > c$, alors par la loi des grands nombres

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - c) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathbb{E}(X_1)) + \mathbb{E}(X_1) - c \to \mathbb{E}(X_1) - c > 0$$

p.s. et donc p.s. S_n tend vers $-\infty$. Il s'en suit que $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$.

2. On suppose que $\mathbb{E}(X_1) < c$ et $\mathbb{P}(X_1 > c) > 0$. On a

$$\varphi'(\lambda) = \mathbb{E}((X_1 - c)e^{\lambda(X_1-c)}), \qquad \varphi'(0) = \mathbb{E}(X_1) - c < 0,$$

$$\varphi''(\lambda) = \mathbb{E}\left((X_1 - c)^2 e^{\lambda(X_1-c)}\right) > 0.$$

En outre $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(\lambda) \geq \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(X_1>c)}\, e^{\lambda(X_1-c)})$ et puisque $\mathbb{P}(X_1 > c) > 0$ on obtient par convergence monotone

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \varphi(\lambda) \geq \lim_{\lambda\to+\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(X_1>c)}\, e^{\lambda(X_1-c)}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(X_1>c)} \lim_{\lambda\to+\infty} e^{\lambda(X_1-c)}) = +\infty.$$

Il s'en suit qu'elle repasse une et une seule fois par 1 pour un $\lambda = \lambda_0$.

3. Nous avons

$$\mathbb{E}\left(V_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = V_{n-1}\, \mathbb{E}\left(e^{\lambda_0(X_n-c)} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = V_{n-1}\, \mathbb{E}\left(e^{\lambda_0(X_n-c)}\right) = V_{n-1},$$

où nous avons utilisé l'indépendance de X_n de $\mathcal{F}_{n-1}$ et la définition de λ_0.

4. Si $N \geq 1$ alors
$$\mathbb{E}(V_N \, \mathbb{1}_{(\tau \leq N)}) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}(V_N \, \mathbb{1}_{(\tau = k)}).$$
Or $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$ et, puisque V_n est une martingale, alors $\mathbb{E}(V_N \, \mathbb{1}_{(\tau=k)}) = \mathbb{E}(V_k \, \mathbb{1}_{(\tau=k)})$. Nous obtenons
$$\mathbb{E}(V_N \, \mathbb{1}_{(\tau \leq N)}) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}(V_k \, \mathbb{1}_{(\tau = k)}) \geq e^{\lambda_0 x} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}(V_k \, \mathbb{1}_{(\tau = k)}) \geq e^{\lambda_0 x} \, \mathbb{P}(\tau \leq N).$$

5. Puisque $V_N \geq 0$ nous avons
$$e^{\lambda_0 x} \, \mathbb{P}(\tau \leq N) \leq \mathbb{E}(V_N \, \mathbb{1}_{(\tau \leq N)}) \leq \mathbb{E}(V_N) = \mathbb{E}(V_0) = 1,$$
car V_n est une martingale. Puisque $\{\tau \leq N\} \subseteq \{\tau \leq N+1\}$, en passant à la limite en N nous avons $\mathbb{P}(\tau < +\infty) \leq e^{-\lambda_0 x}$.