
Cours de séries. Correction de quelques exercices des feuilles 3 et 4

Correction de l'exercice 2, feuille 3.

- a) On fixe $x \geq 0$. Si $x = 0$, $f_n(x) = 1$ pour tout n et donc $f_n(x)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.
Supposons $x > 0$. Alors pour n assez grand (dès que $n \geq x$),

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \exp(n \ln(1 - x/n)).$$

Or $\ln(1 + u) \sim u$ quand $u \rightarrow 0$. Donc $\ln(1 - x/n) \sim -x/n$ quand $n \rightarrow +\infty$. On en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(1 - x/n) = -x$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}.$$

Pour conclure, la fonction f_n converge ponctuellement, quand $n \rightarrow +\infty$ vers la fonction f définie par $f(x) = e^{-x}$.

- b) Soit $x \in [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $x \geq n$, on a $f_n(x) = 0$ et donc trivialement $f_n(x) \leq f(x)$.
Supposons $0 \leq x < n$. Dans ce cas

$$f_n(x) = \exp(n \ln(1 - x/n)).$$

En étudiant la fonction $u \mapsto \ln(1 - u) + u$ sur $[0, 1[$, on obtient que pour tout u de $[0, 1[$, $\ln(1 - u) \leq -u$. On en déduit, par croissance de l'exponentielle,

$$f_n(x) \leq \exp(n \ln(1 - x/n)) \leq \exp(-n \frac{x}{n}) = e^{-x} = f(x),$$

ce qui conclut la preuve.

- c) Soit $a > 0$. Dès que $n \geq a$, $f_n(x) = (1 - x/n)^n$. Dans la suite on suppose $n \geq a$. On a

$$f(x) - f_n(x) = e^{-x} [1 - \exp(n \ln(1 - x/n) + x)].$$

Pour majorer $f(x) - f_n(x)$, on va étudier la fonction $g_n(x) = 1 - \exp(n \ln(1 - x/n) + x)$ sur $[0, a]$. Cette fonction est dérivable et

$$g'_n(x) = \left(\frac{1}{1 - x/n} - 1\right) \geq 0.$$

donc pour tout x de $[0, a]$, $g_n(0) \leq g_n(x) \leq g_n(a)$. D'où

$$\forall x \in [0, a], \quad 0 \leq 1 - \exp(n \ln(1 - x/n) + x) \leq 1 - \exp(n \ln(1 - a/n) + a).$$

En revenant à l'expression de $f(x) - f_n(x)$ et en remarquant que $e^{-x} \leq 1$ pour $x \geq 0$, on obtient

$$\forall x \in [0, a], \quad 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq 1 - \exp(n \ln(1 - a/n) + a),$$

et donc

$$\sup_{x \in [0, a]} |f(x) - f_n(x)| \leq 1 - \exp(n \ln(1 - a/n) + a).$$

Or $n \ln(1 - a/n)$ tend vers a quand n tend vers $+\infty$, donc $1 - \exp(n \ln(1 - a/n) + a)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui montre que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0, a]$.

- d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sup_{x \geq 0} |f(x) - f_n(x)| = \max \left[\sup_{x \in [0, a]} |f(x) - f_n(x)| + \sup_{x > a} |f(x) - f_n(x)| \right].$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Soit $a > 0$ à choisir. Par la question b), si $x \geq a$, alors $-e^{-a} \leq -f(x) \leq f_n(x) - f(x) \leq 0$.
Donc

$$(1) \quad \sup_{x > a} |f(x) - f_n(x)| \leq e^{-a}$$

Soit $a = -\ln(1 + \varepsilon)$. Par la question c),

$$(2) \quad \exists N > 0, \forall n \geq N, \quad \sup_{x \in [0, a]} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

D'après (1) et (2),

$$\forall n \geq N, \quad \sup_{x \geq 0} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que f_n **converge uniformément vers f sur $[0, +\infty[$**

Correction de l'exercice 3 de la feuille 4.

Soit $f_n(x) = xe^{-n^2x^2}$

a) Pour tout n , $f_n(0) = 0$ donc $\sum_{n \geq 0} f_n(0)$ converge. Fixons $x > 0$. Par croissance comparée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 |f_n(x)| = 0.$$

Donc pour n grand, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$. Par comparaison avec la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{n^2}$, on obtient que $\sum_{n \geq 0} |f_n(x)|$ converge et donc que $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge. En conclusion, **la série $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .**

Pour étudier la convergence normale, on calcule (n étant d'abord fixé)

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|.$$

La fonction f_n est impaire, il suffit de l'étudier sur $[0, +\infty[$. Sur cet intervalle, f_n est positive. Le calcul de sa dérivée montre que f_n atteint son maximum en $\frac{1}{n\sqrt{2}}$, et qu'il vaut $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$. La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc la série $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge. **La série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur \mathbb{R} .**

b) La série $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} . Elle converge uniformément sur \mathbb{R} si et seulement si son reste $R_n(x) = \sum_{k \geq n+1} xe^{-k^2x^2}$ converge uniformément vers 0 sur \mathbb{R} . Soit $\tilde{R}_n(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} xe^{-k^2x^2}$. On a

$$\tilde{R}_n\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n} e^{-\frac{k^2}{n^2}} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} e^{-4} \geq e^{-4},$$

car la somme comprend exactement n éléments. En remarquant que pour $x \geq 0$, $R_n(x) \geq \tilde{R}_n(x)$, on obtient

$$\|R_n\|_\infty \geq R_n\left(\frac{1}{n}\right) \geq e^{-4},$$

ce qui montre que la suite (R_n) ne tend pas uniformément vers 0 et donc que **la série de fonction $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} .**

Question subsidiaire. En utilisant la minoration précédente, montrer que $\sum_{n \geq 0} f_n$ n'est pas continue en 0.

c) Continuité.

Soit $a > 0$. Les fonctions f_n sont continues sur \mathbb{R} (comme composées de fonctions continues), donc sur $[a, +\infty[$. Par le théorème de continuité d'une somme de série de fonctions, il suffit, pour montrer que la somme de la série est continue sur $[a, +\infty[$, de montrer que sa convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$. On va en fait montrer la convergence normale. L'étude de la dérivée de la fonction f_n sur $[0, +\infty[$ montre qu'elle est décroissante sur $[\frac{1}{n\sqrt{2}}, +\infty[$. Donc dès que n est assez grand (précisément $n \geq \frac{a}{\sqrt{2}}$) la fonction f_n est décroissante sur $[a, +\infty[$. On se place désormais dans ce cas. On a alors

$$x \in [a, +\infty[\implies 0 \leq f_n(x) \leq ae^{-n^2a^2}$$

et donc $\sup_{x \geq a} |f_n(x)| \leq ae^{-n^2a^2}$. La série numérique $\sum_{n \geq 0} ae^{-n^2a^2}$ converge (par exemple par comparaison avec une série de Riemann convergente), donc $\sum f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[a, +\infty[$. En conclusion, **$\sum_{n \geq 0} f_n$ est continue sur $[a, +\infty[$.**

On a montré la continuité de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. La continuité est une propriété locale, donc $\sum_{n \geq 0} f_n$ est continue sur $\bigcup_{a > 0} [a, +\infty[=]0, +\infty[$.

Dérivabilité.

Les fonctions f_n sont dérivables sur \mathbb{R} , donc sur $[a, +\infty[$, et la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. Par le théorème de dérivation des séries de fonctions, il suffit de montrer que la série des dérivées $\sum f'_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. On va en fait montrer que cette convergence est normale. On a

$$f'_n(x) = (1 - 2n^2x^2)e^{-n^2x^2}.$$

On peut étudier directement la fonction, ou remarquer que $f_n(x) = g(n^2x^2)$, où

$$g(t) = (1 - 2t)e^{-t}.$$

Donc

$$\sup_{x \geq a} |f'_n(x)| = \sup_{t \geq n^2a^2} |g(t)|.$$

Remarquons que g est négative pour $t \geq 1/2$. De plus $g'(t) = (-3 + 2t)e^{-t}$, la fonction g est donc croissante dès que $t \geq 3/2$. Donc dès que n est assez grand, g est négative et croissante sur $[n^2a^2, +\infty[$ et

$$\forall t \geq n^2a^2, \quad (1 - 2n^2a^2)e^{-n^2a^2} = g(n^2a^2) \leq g(t) \leq 0$$

On en déduit que pour n assez grand

$$\sup_{x \geq a} |f'_n(x)| \leq 2n^2a^2e^{-n^2a^2}.$$

La série $\sum f'_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[a, +\infty[$. Donc $\sum_{n \geq 0} f_n$ est dérivable sur $[a, +\infty[$.

On a montré la dérivabilité pour tout $a > 0$, on en déduit que $\sum_{n \geq 0} f_n$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.