L2 S3
2006/2007
Mathématiques

TD séries 6: séries de Fourier

Un bref aperçu historique.
Orphelin à neuf ans, Fourier, en 1789, enseigna à Auxerre, sa ville natale. Arrêté en 1794, puis relaché après l'exécution de Robespierre, Fourier rejoignit Paris pour entrer à l'Ecole Normale, fondée et fermée la même année. En 1795, Fourier devint assistant à l'Ecole polytechnique, et en 1798, il suivit Monge dans la campagne d'Egypte de Bonaparte. A son retour en 1801, Napoléon le nomma préfet de l'Isère. Après les Cent-Jours, Fourier fut nommé, grâce à un ami, directeur du bureau des statistiques de la Seine. En 1817, il devint membre de l'Académie des Sciences et son secrétaire perpétuel en 1822; il fut élu à l'Académie Française en 1827. Son œuvre majeure est la création de la théorie de la chaleur qui l'a conduit à la théorie de ce que l'on appelle maintenant les séries et intégrales de Fourier. Il est considéré par certains comme le créateur de la physique mathématique.

Notations.
Soit f une fonction 2π-périodique. Dans tout ce qui suit, on note $c_n(f) = \hat{f}(n)$ (ou simplement c_n) ses coefficients de Fourier complexes, et, si f est à valeurs réelles, $a_n(f)$ et $b_n(f)$ (ou simplement a_n et b_n), ses coefficients de Fourier réels,

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,\ n \geq 1;$$
$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx,\ n \geq 1; \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 1: quelques calculs.
a) Tracer la courbe représentative sur $[0, 4\pi]$ et calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ de la fonction 2π-périodique f, telle que

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \text{ sur } [0, 2\pi[.$$

b) Calculer $a_n(g)$ et $b_n(g)$, où g est la fonction 2π-périodique telle que

$$g(x) = \cos(\alpha x) \text{ sur } [-\pi, \pi[.$$

On distinguera deux cas, selon que le paramètre α est ou non un entier relatif.

Exercice 2. Soit f une fonction 2π-périodique.
a) Exprimer à l'aide des $c_k(f)$ les coefficients de Fourier $c_n\left(\overline{f}\right)$ et $c_n(g)$, où g est définie par $g(x) = f(x)\cos x$. En supposant f réelle, exprimer les coefficients de Fourier $a_n(g)$ et $b_n(g)$ de g en fonction de $a_n(f)$ et $b_n(f)$.
b) Supposons que f soit également π-périodique. Exprimer les coefficients de Fourier complexes $C_n(f)$ de f *considérée comme une fonction π-périodique*, en fonction des $c_k(f)$.

Exercice 3. En appliquant le théorème de Dirichlet à la fonction f de l'exercice **1. a**, montrer

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 4. Soit g la fonction impaire, périodique de période 2π telle que $g(0) = g(\pi) = 0$ et $g(x) = 1$ si $x \in]0, \pi[$. Tracer g sur $[-3\pi, 3\pi]$. Calculer la série de Fourier de g et étudier les convergences simple et normale de cette série de fonctions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Déterminer une suite de réels (a_n) telle que $\forall x \in [0, \pi[, \sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$.

Exercice 6. Soit f la somme d'une série trigonométrique sur $\mathbb{R}$

$$f(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n e^{int}.$$

Montrer que si la convergence est uniforme alors la série de Fourier de f est $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e^{int}$.

Exercice 7. Soit f 2π-périodique telle que $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi[$.

a) Montrer que $b_n = 0$ et que $a_n = 4\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer a_0.

b) En déduire les valeurs de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

c) Etudier la convergence uniforme de la série de Fourier de f.

d) Soit g la fonction 2π périodique définie par $\forall x \in [-\pi; \pi[,\ g(x) = \int_0^x f(t) - \pi^2/3\ dt$. Déterminer un développement en série trigonométrique de g.

e) La série précédente est elle la série de Fourier de g?

f) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Exercice 8. Soient $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et $f(x) = e^{i\alpha x}$ sur $]-\pi, \pi[$, 2π-périodique.
Déterminer la série de Fourier complexe de f. Soit S sa somme de cette série. En calculant $S(0)$ et $S(\pi)$, déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - \alpha^2}$ puis montrer

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} = \frac{\pi}{\tan(\alpha\pi)}.$$

Exercice 9. Soit f une fonction 2π-périodique, de classe C^1.

a) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Calculer $c_n(f')$, en fonctions de $c_n(f)$.

b) Supposons $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx,$$

et étudier le cas où on a l'égalité.

Exercice 10. On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y = |\sin t|$.

a) Ecrire la fonction $t \mapsto |\sin t|$ comme somme d'une série trigonométrique.

b) Résoudre pour $n \in \mathbb{N}$ l'équation différentielle $y''(t) + 4y(t) = \cos(nt)$.

c) Déduire des deux questions précédentes une solution particulière de (E), puis sa solution générale.

Exercice 11. Soit $a > 0$, soit $f(t)$ l'application définie par

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nt}{n^2 + a^2}.$$

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, continue et 2π-périodique.

b) Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction 2π-périodique h définie par

$$\forall t \in [-\pi, \pi],\ h(t) = f(t) - t^2/4$$

(on pourra utiliser les résultats des exercices 6 et 7). Montrer que h est une fonction C^2 sur $\mathbb{R}$.

c) Exprimer h'' en fonction de f. Montrer que f est C^0 sur $\mathbb{R}$ et C^2 sur $]-\pi, \pi[$, puis déterminer une équation différentielle vérifiée par f.

d) En déduire une expression de $f(t)$, on peut calculer $f(0)$ en utilisant le résultat de l'exercice 8