

---

## TD séries 4: séries de fonctions

---

**Exercice 1.** Étudier la convergence (simple, normale, uniforme) des séries de fonctions de terme général  $f_n$  sur l'intervalle  $I$  ( $I = \mathbb{R}$  lorsque ce n'est pas précisé).

$$\begin{array}{ll} a) f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}, & I = \mathbb{R}_+; \\ c) f_n(x) = \frac{1}{x} \text{ si } x = n, f_n(x) = 0 \text{ sinon;} & \end{array} \quad \begin{array}{l} b) f_n(x) = \frac{x}{n^2}; \\ d) f_n(x) = \frac{nx}{3n^4+x^4}. \end{array}$$

**Exercice 2.** Soit la fonction  $f$  définie par la somme de la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos(nx)}{1+n^3}$ . Montrer que  $f$  est bien définie et étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 3.** Soit la série de fonctions sur  $\mathbb{R}$  de terme général  $f_n(x) = xe^{-n^2x^2}$ .

a) La série converge-t-elle simplement sur  $\mathbb{R}$ ? Normalement sur  $\mathbb{R}$ ?

b) Soit  $\tilde{R}_n(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} xe^{-k^2x^2}$ . En minorant  $\tilde{R}_n(\frac{1}{n})$ , étudier la convergence uniforme de la série de terme général  $f_n$  sur  $\mathbb{R}$ .

c) Montrer que la somme  $S$  de la série de terme général  $f_n$  est continue sur  $[a, +\infty[$  pour tout  $a > 0$ , puis sur  $]0, +\infty[$ . Montrer de même sa dérivabilité sur  $]0, +\infty[$ .

**Exercice 4.** On considère  $f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$  sur  $\mathbb{R}$ .

a) Étudier la convergence simple de la série de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$ . On note  $S$  la somme de cette série.

b) Montrer que  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

c) Montrer que  $S$  est de classe  $C^1$  sur  $[a; +\infty[$  pour tout  $a > 0$ , puis que  $S$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

d) Montrer qu'il existe  $K > 0$  tel que pour tout  $x > 1$ , on ait  $S(x) \leq \frac{K}{x}$ . En déduire la limite de  $S$  en  $+\infty$ .

e) Que vaut  $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x)$ ?

f) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x)/x = +\infty$ . (On pourra commencer par donner la limite de  $T_N(x) =$

$$\frac{1}{x} \sum_{n=1}^N f_n(x) \text{ en } 0^+).$$

Que peut on en déduire pour le graphe de  $S$ ? La fonction  $S$  est-elle dérivable sur  $\mathbb{R}$ ?

**Exercice 5.** Soit  $f_n(x) = \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$ . Étudier la convergence (simple, absolue<sup>1</sup>, normale et uniforme) de la série de terme général  $f_n$  sur  $\mathbb{R}$  et calculer sa somme.

---

<sup>1</sup>C'est à dire la convergence simple de la série de terme générale  $|f_n|$ .

**Exercice 6.**

a) Étudier la convergence simple et uniforme de la série  $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}$ .

b) Calculer  $F$  lorsque la série converge. *On pourra (en justifiant) intégrer terme à terme.*

**Exercice 7.**

a) Soit  $u_n = (-1)^n v_n$  (où  $(v_n)_{n \geq 1}$  est positive, décroissante et tend vers 0) le terme général d'une série (numérique) alternée. On considère le reste  $R_n = \sum_{k \geq n+1} u_k$ . Montrer que  $R_n$  est

du signe de  $(-1)^{n+1}$  et qu'on a la majoration  $|R_n| \leq v_{n+1}$ .

Soit  $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

b) Étudier la convergence (simple, normale, uniforme) de la série de terme général  $f_n$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On note  $F$  sa somme.

c) Montrer que  $F$  est dérivable sur tout intervalle de la forme  $[a; \infty[$  avec  $a > 0$ , puis sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

d) Calculer  $\int_0^1 t^{n+x-1} dt$ . En déduire que, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $F(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$ .

e) Montrer que  $F$  est décroissante, puis déterminer une relation simple entre  $F(x)$  et  $F(x+1)$ .

f) Déterminer la valeur de  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ , ainsi qu'un équivalent de  $F$  au voisinage de 0.

**Exercice 8.** (Fonction  $\zeta$  de Riemann) : On note, pour  $x \in ]1, +\infty[$ ,  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ .

a) Montrer que  $\zeta$  est de classe  $C^2$  sur  $]1, +\infty[$ .

b) Montrer que pour  $k > 1$  entier et  $x \in ]1, +\infty[$ , on a  $\int_k^{k+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{k^x} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^x} dt$ .

c) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$ .

d) Étudier les variations et la convexité de  $\zeta$  et tracer la courbe représentative de  $\zeta$ .