
TD séries 3: suite de fonctions

Exercice 1. Étudier la convergence simple, puis uniforme des suites de fonctions (f_n) sur l'ensemble I correspondant ($I = \mathbb{R}$ lorsque ce n'est pas précisé).

a) $f_n(x) = \frac{x}{x^2 + n}$; b) $f_n(x) = xe^{\frac{x}{n}}$, $I = [0, +\infty[$; c) $f_n(x) = \ln\left(x + \frac{1}{n}\right)$, $I =]0, +\infty[$;
d) $f_n(x) = x^n$, $I = [0, 1]$; e) $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$, $I = [0, 1]$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, telle que

$$f_n(x) = (1 - x/n)^n, \text{ si } 0 \leq x \leq n; \quad f_n(x) = 0, \text{ si } x > n.$$

- a) Déterminer la limite simple f de la suite (f_n) .
b) Montrer: $\forall x \in [0, +\infty[, 0 \leq f_n(x) \leq f(x)$.
c) Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment $[0, a]$, $a > 0$, puis que (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3. Soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, telle que

$$f_n(x) = (n-1)x, \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}; \quad f_n(x) = 1-x, \text{ si } \frac{1}{n} < x \leq 1.$$

Tracer f_n , et étudier la convergence (simple, puis uniforme) de la suite (f_n) .

Exercice 4: non interversion limite intégrale. Soit $f_n(x) = n \cos^n x \sin x$.

- a) Chercher la limite simple, f de la suite (f_n) .
b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t) dt \neq \int_0^{\pi/2} f(t) dt$.

Exercice 5. Soit (f_n) une suite de fonctions bornées qui converge uniformément sur un intervalle I vers une fonction f . Montrer que les fonctions f_n sont uniformément bornées, i.e. qu'il existe une constante $C > 0$, indépendante de n , telle que

$$\forall x \in I, \forall n, \quad |f_n(x)| \leq C.$$

Exercice 6. Soient I un intervalle de \mathbb{R} , (u_n) une suite d'éléments de I qui converge vers $l \in I$ et (f_n) une suite d'applications continues qui converge uniformément vers f sur I .

- a) Montrer que la suite de réels $(f_n(u_n))$ converge vers $f(l)$.
b) Soient $I = [0; 1]$, $f_n(x) = nx^n(1-x)$ et $u_n = \frac{n}{1+n}$. Étudier la convergence simple de la suite f_n , puis sa convergence uniforme.

Exercice 7. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a, b]$ qui converge uniformément sur l'intervalle $]a, b]$ vers une fonction f .

- a) Montrer que la suite de réels $(f_n(a))_n$ est une suite de Cauchy.
b) On note \tilde{f} la limite simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[a, b]$. Montrer que la convergence est uniforme.

c) Soit $f_n(x) = x^n$. Quelle est la limite simple de la suite (f_n) sur $]0, 1[$? Cette limite est-elle uniforme sur $]0, 1[$?

Exercice 8. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. et $f_n(x) = f(x^n)$ pour $x \in [0, 1]$.

a) Étudier la limite simple de la suite (f_n) .

b) Si $f_n(0) \neq f_n(1)$, justifier rapidement que cette limite n'est pas uniforme.

c) Plus généralement, montrer que la limite n'est pas uniforme dès que la fonction f n'est pas constante.

Exercice 9. Vrai ou faux?

a) Si (f_n) converge simplement vers f sur un intervalle I et toutes les fonctions f_n sont continues sur I , alors f est continue sur I (Cauchy, cours d'analyse 1822).

b) Si (f_n) converge simplement vers f sur un intervalle I et toutes les fonctions f_n sont croissantes sur I , alors f est croissante sur I .

c) Si (f_n) converge uniformément vers f sur un intervalle I et toutes les fonctions f_n sont continues sur I , alors f est continue sur I .

d) Soit f un fonction définie sur $]0, 1[$ et continue sur $]\varepsilon, 1[$ pour tout $\varepsilon > 0$. Alors f est continue sur $]0, 1[$.

e) Si les f_n sont continues sur $]0, 1[$ et pour tout $\varepsilon > 0$, (f_n) converge uniformément vers f sur $]\varepsilon, 1[$. Alors (f_n) converge uniformément vers f sur $]0, 1[$.