
TD séries 2: séries numériques II

Exercice 1. Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes réels positifs, telles que $a_n \sim b_n$. On note

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, \quad S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$$

- a) Montrer que si $\sum a_n$ converge alors $R_n \sim S_n$.
b) Montrer que si $\sum a_n$ diverge alors $A_n \sim B_n$.

Exercice 2. On note $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$.

- a) Déterminer une suite (v_k) telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n v_k$, en déduire que la suite (u_n) converge, on notera γ sa limite, ce réel est appelé constante d'Euler.
b) En utilisant l'exercice 1 montrer que $u_n - \gamma \sim \frac{1}{2n}$.

Exercice 3. (Critère de Raabe-Duhamel)

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs, on suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 1$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right).$$

- a) On pose $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$, montrer que la série de terme général w_n converge. En déduire qu'il existe un réel λ tel que $u_n \sim \lambda n^{-\alpha}$ et déterminer la nature de $\sum u_n$ selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) Déterminer la nature des séries de terme général suivant:

$$\sqrt{n!} \sin x \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \dots \sin \frac{x}{\sqrt{n}} \quad (x \in \mathbb{R}); \quad \prod_{p=1}^n \left(2 - e^{\frac{1}{p}}\right).$$

Exercice 4. Déterminer la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$ en fonction des valeurs de $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit $(u_n)_n$ une suite positive tendant vers 0. On suppose de plus que la suite $v_n = u_n - u_{n+1}$ est décroissante. Montrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Exercice 6. Soient $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ et $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. On rappelle (Exercice 2) que la suite $u_n = T_n - \ln n$ converge vers γ (constante d'Euler).

- a) Montrer que $S_{2n} = T_{2n} - T_n$. Exprimer alors S_{2n} en fonction de u_n , et en déduire que la suite S_{2n} converge vers une limite S que l'on précisera.
b) Montrer que la suite S_{2n+1} converge également vers S .
c) En déduire que la série alternée $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et calculer sa somme.

On considère maintenant la série obtenue à partir de la série alternée en prenant successivement 2 termes positifs et 1 terme négatif: $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \dots$. C'est à dire la série $\sum v_n$ avec

$$v_{3n+1} = \frac{1}{4n+1}, \quad v_{3n+2} = \frac{1}{4n+3}, \quad v_{3n+3} = -\frac{1}{2n+2}.$$

On notera V_n la somme partielle.

- d) Montrer que $V_{3n} = T_{4n} - \frac{1}{2}T_n - \frac{1}{2}T_{2n}$.
e) En déduire que la suite V_{3n} converge vers une limite V à préciser.
f) Montrer que les suites V_{3n+1} et V_{3n+2} convergent également vers V .
g) En déduire que la série $\sum v_n$ et donner sa somme. Comparer avec la série alternée.

N.B. Si au lieu d'alterner 2 termes positifs et 1 négatif on avait alterné p termes positifs et q négatifs, la série ainsi obtenue serait également convergente et sa somme vaudrait $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$.