

---

**TD séries 1: séries numériques I**

---

**Exercice 1.** Déterminer la nature des séries de terme général suivant :

$$a_n = \frac{1}{(2n+3)(n+7)}; \quad b_n = \frac{3+(-1)^n}{n}; \quad c_n = \frac{1+n}{n^2(n+\ln n)};$$

$$d_n = \frac{n^3 - n^2 + 2}{(1+n^2)2^n}; \quad e_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}; \quad f_n = \frac{1}{2n(n-1)}.$$

**Exercice 2.** Déterminer les valeurs des paramètres réels  $\alpha$  et  $\beta$  pour lesquels la série de terme général

$$a_n = \frac{n^\alpha}{1+n^\beta}$$

converge.

**Exercice 3.** Déterminer la nature des séries de terme général suivant

$$a_n = e^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}; \quad b_n = \ln \left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right); \quad c_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right);$$

$$d_n = \left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n; \quad e_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}; \quad f_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln n}.$$

**Exercice 4.** Déterminer la nature des séries de terme général suivant, en utilisant le critère de Cauchy ou de d'Alembert :

$$a_n = \frac{n!}{n^7 2^n}; \quad b_n = e^{\alpha n^2} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n^3}, \quad (\alpha \in \mathbb{R}); \quad c_n = n! \times \prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{2^k}\right); \quad d_n = \frac{n!}{n^n}.$$

**Exercice 5: séries de Bertrand.** Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels positifs. En comparant la série avec une intégrale, déterminer, selon les valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}.$$

**Exercice 6.** Calculer les sommes suivantes, en calculant d'abord les sommes partielles.

$$A = \sum_{k=2004}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}; \quad B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}; \quad C = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^k}; \quad D = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}}{2^{n+1}}.$$

Pour le  $A$  on pourra utiliser une décomposition en éléments simples et pour le  $C$  utiliser le  $B$ .

**Exercice 7.** Déterminer la nature des séries de terme général suivant :

$$a_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right); \quad b_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 2006 \cos(e^n)}; \quad c_n = \frac{1}{n^{1/4}} - \frac{1}{n^{1/4} - (-1)^n n^{1/8}};$$

$$d_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right); \quad e_n = (-1)^n \left(\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{100}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

**Exercice 8.** Soient  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  et  $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ .

a) Montrer que  $u_n \sim v_n$ .

b) Étudier la convergence des séries  $\sum u_n$ ,  $\sum(u_n - v_n)$  et  $\sum v_n$ .

**Exercice 9.** Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs convergente, étudier la convergence des séries:

$$\sum u_n^2; \quad \sum \ln(1 + u_n); \quad \sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}.$$