DEVOIR N°3

Exercice 1. Soit $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$.

i. Etudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+$. Notons S la somme cette série.
ii. Montrer que $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.
iii. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. En déduire que S est continue sur $\mathbb{R}_+$.
iv. Montrer que S est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. En déduire que S est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
v. Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $\sigma_n \; : \; [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; a \longmapsto (-1)^n \dfrac{a^{n+x}}{n+x}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

- **a.** Montrer que $\sum \sigma_n$ converge uniformement sur $[0,1]$. En déduire que sa somme σ_x est continue sur $[0,1]$.
- **b.** Calculer $\displaystyle\int_0^a t^{n+x-1}\mathrm{d}t$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall a \in [0,1]$.
- **c.** Montrer que $\sigma_x(a) = -\displaystyle\int_0^a \frac{t^x}{1+t}\mathrm{d}t$, $\forall a \in [0,1[$.
- **d.** Montrer que $\sigma_x(1) = -\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\mathrm{d}t$. En déduire que $S(x) = -\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\mathrm{d}t$.

vi. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Exercice 2. Soit f la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ où $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

i. Soit $h \; : \; [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \dfrac{t}{1+t^2}$. Montrer que $0 \leq h \leq \dfrac{1}{2}$ sur $[0,1]$.
ii. En déduire que le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$ vérifie $R \geq 2$.
iii. Étudier la convergence normale sur $[0,1]$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum \left(\frac{xt}{1+t^2}\right)^n$, $\forall |x| < 2$.
iv. Montrer que $f(x) = 1 + \displaystyle\int_0^1 \frac{xt}{1-xt+t^2}\mathrm{d}t$, $\forall |x| < 2$.