CORRECTION DU DEVOIR N°3

Exercice 1. Soit $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$.

i. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. La suite numérique $\left(\dfrac{1}{x+n}\right)_n$ est décroissante, positive et de limite nulle. Donc, par le théorème des séries alternées, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge, $\forall x \in \mathbb{R}^+$. Ainsi, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

ii. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+} = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x)| = \dfrac{1}{n}$. Or, $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge. Ainsi, $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

iii. Notons $g_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x+n}$ et $h_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (-1)^n$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Nous montrons facilement que $g_n \geq g_{n+1} \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
De plus, $g_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformément sur $\mathbb{R}_+$ car $\|g_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+} = \dfrac{1}{n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.
Enfin, les sommes partielles associées à la suite de fonctions $\big(h_n\big)_n$ sont uniformément bornées sur $\mathbb{R}_+$:

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} h_n \right\|_\infty^{\mathbb{R}_+} = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \left| \sum_{n=1}^{N} h_n(x) \right| = \left| \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \right| \leq 1, \ \forall N \in \mathbb{N}^* \ .$$

Donc, en utilisant le théorème d'Abel uniforme, la série $\sum f_n = \sum g_n h_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. De plus, $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Alors, par le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions continues, $S = \sum\limits_{n \geq 1} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

iv. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n'(x) = \dfrac{-(-1)^n}{(x+n)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$.
De plus, $\|f_n'\|_\infty^{\mathbb{R}_+} = \dfrac{1}{n^2}$. Or, la série numérique $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge. Ainsi, $\sum f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$. D'où, $\sum f_n'$ converge uniformement sur $\mathbb{R}_+$.
Enfin, $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. Donc, par le théorème de dérivabilité de la somme d'une série de fonctions dérivables, S est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

v. Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $\sigma_n \ : \ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$; $a \longmapsto (-1)^n \dfrac{a^{n+x}}{n+x}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a. Nous appliquons de nouveau le théorème d'Abel uniforme : nous vérifions comme en **iii.** que la suite de fonctions $\big(|\sigma_n|\big)_n$ est positive, décroissante et converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$ — ***id est*** $0 \leq |\sigma_{n+1}| \leq |\sigma_n|$ sur $[0,1]$ et $\|\sigma_n\|_\infty^{[0,1]} \leq \dfrac{1}{n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$. Aussi, $\sum \sigma_n$ converge uniformément sur $[0,1]$. De plus, σ_n est continue sur $[0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Donc, σ_x est continue sur $[0,1]$ par le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions continues.

b. Soient $a \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $\displaystyle\int_0^a t^{n+x-1} \mathrm{d}t = \left[\frac{a^{n+x}}{n+x}\right]_0^1 = \frac{a^{x+n}}{x+n}$.

c. Soit $a \in [0,1[$:

$$\begin{aligned}
\sigma_x(a) &= \sum_{n\geq 1} \sigma_n(a) = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{a^{x+n}}{x+n} = \sum_{n\geq 1} (-1)^n \int_0^a t^{n+x-1} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^a t^{x-1} \left(\sum_{n \geq 1} (-t)^n \right) \mathrm{d}t \qquad \Big(\text{car } \textstyle\sum (-t)^n \text{ converge normalement sur } [0,a],\ \forall a \in [0,1[\Big) \\
&= -\int_0^a \frac{t^x}{1+t} \mathrm{d}t \ . \qquad \Big(\text{série géométrique de raison vérifiant } |-t| \leq a < 1\Big)
\end{aligned}$$

d. σ_x est continue en 1. Donc,

$$\sigma_x(1) = \lim_{a1^-} \sigma_x(a) = -\lim_{a1^-} \int_0^a \frac{t^x}{1+t}\mathrm{d}t$$
$$= -\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\mathrm{d}t \ ; \qquad \left(\text{car } t \longmapsto \frac{t^x}{1+t} \text{ est continue sur } [0,1],\ \forall x \in \mathbb{R}_+\right)$$

$$\text{or,}\quad \sigma_x(1) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n} = S(x)\ ;$$

$$\text{d'où,}\quad S(x) = -\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\mathrm{d}t,\ \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

vi. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = -\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = -S(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2$, en prenant $x=0$ dans **v.d**.

Exercice 2. Soit f la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ où $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

i. Soit $h\ :\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \dfrac{t}{1+t^2}$. Alors, $\forall t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} & 0 \leq (1-t)^2 \\ \iff\quad & 0 \leq 1 - 2t + t^2 \\ \iff\quad & 0 \leq h(t) = \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}\ . \end{aligned}$$

ii. D'après **i.**, nous avons $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & 0 \leq h(t)^n \leq \frac{1}{2^n}\ ,\ \forall t \in [0,1] \\ \Longrightarrow\quad & 0 \leq \int_0^1 h(t)^n \mathrm{d}t = a_n \leq \frac{1}{2^n}\int_0^1 \mathrm{d}t = \frac{1}{2^n}\ . \end{aligned}$$

Donc, $\left\{ r > 0\ /\ \left(\dfrac{r^n}{2^n}\right)_n \text{ est bornée} \right\} \subseteq \left\{ r > 0\ /\ \left(a_n r^n\right)_n \text{ est bornée} \right\}$. Dès lors, en passant à la borne supérieure, $R' \leq R$ où R' est le rayon de convergence de la série entière $\sum \left(\dfrac{x}{2}\right)^n$ qui vaut 2 par le critère de d'Alembert. Ainsi, $R \geq 2$.

iii. Soit $|x| < 2$. Notons $\forall n \in \mathbb{N},\ h_n = x^n h^n$ sur $[0,1]$. Comme $\forall t \in [0,1],\ 0 \leq |h_n(t)| \leq \dfrac{|x|}{2^n}$; $\|h_n\|_\infty^{[0,1]} \leq \dfrac{|x|^n}{2^n}$. Or, $\sum \left(\dfrac{|x|}{2}\right)^n$ converge en tant que série géométrique de raison $\dfrac{|x|}{2} < 1$. Donc, $\sum h_n$ converge normalement sur $[0,1]$.

iv. D'après **iii.**, $\sum h_n$ converge uniformément sur $[0,1]$, $\forall |x| < 2$. D'où, $\forall |x| < 2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} \int_0^1 \left(\frac{xt}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sum_{n\geq 0} \left(\frac{xt}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 - \dfrac{xt}{1+t^2}} \qquad \left(\text{série géométrique de raison vérifiant } \left|\frac{xt}{1+t^2}\right| \leq \frac{|x|}{2} < 1,\ \forall t \in [0,1] \text{ et } \forall |x| < 2\right) \\ &= \int_0^1 \frac{1+t^2}{1 - xt + t^2}\mathrm{d}t \\ &= 1 + \int_0^1 \frac{xt}{1 - xt + t^2}\mathrm{d}t\ . \end{aligned}$$