
Séries: correction du DM $n^{\circ}2$

Exercice 1. La série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ n'est pas de signe constant (on a $u_n = (-1)^n |u_n|$) et ne vérifie pas les hypothèses du théorème des séries alternées: la suite $|u_n|$ n'est pas décroissante. On commence par réécrire u_n sous la forme

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n}}},$$

puis on effectue un développement limité de $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n}}}$ à l'ordre 1 en $\frac{1}{n}$. On a alors

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \left(1 - \frac{(-1)^n}{2n} + \frac{1}{n} \epsilon_n \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n^{3/2}} + \frac{(-1)^n \epsilon_n}{n^{3/2}} \end{aligned}$$

avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$.

La suite $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n \geq 1}$ est positive, décroissante vers 0. Le théorème des séries alternées permet d'affirmer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

La série de terme général $\frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann avec exposant $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ et donc convergente. Il en est donc de même de la série de terme général $-\frac{1}{2n^{3/2}}$.

Finalement, pour n assez grand on a $|\frac{(-1)^n \epsilon_n}{n^{3/2}}| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$. Par majoration d'une série à termes positifs par une série convergente, la série de terme général $\frac{(-1)^n \epsilon_n}{n^{3/2}}$ est absolument convergente, donc convergente.

Conclusion: le terme général u_n s'écrit comme somme de 3 termes généraux de séries convergentes, donc la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 2.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx}{n^2+x^2} = \frac{x}{n+\frac{x^2}{n}}$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge donc simplement sur \mathbb{R} vers la fonction nulle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \geq |f_n(n)| = \frac{1}{2}$. La convergence n'est donc pas uniforme.

b) Si $x \neq 0$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nx^2} = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n(0) = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(0) = 0$. Ainsi, la suite de fonction $(g_n)_n$ converge simplement sur \mathbb{R} vers la fonction nulle.

Pour étudier la convergence uniforme, on va calculer $\sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x)|$. Les fonctions $g_n(x)$ sont dérivables sur \mathbb{R} , et $g'_n(x) = e^{-nx^2}(1 - 2nx^2)$. La dérivée s'annule en $\pm \frac{1}{\sqrt{2n}}$. De plus, on a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g_n(x) = 0$ pour tout n . Une étude rapide de la fonction g_n permet alors de conclure

que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x)| = \left| g_n \left(\frac{1}{\sqrt{2n}} \right) \right| = \left| g_n \left(-\frac{1}{\sqrt{2n}} \right) \right| = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2n}}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. La suite de fonctions $(g_n)_n$ converge donc uniformément sur \mathbb{R} vers la fonction nulle.

c) Si $|x| > 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = +\infty$, et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x^{2n}} + 1} = 1$.

Si $|x| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0$, et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}} = 0$.

Si $|x| = 1$, $x^{2n} = 1$, et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}} = \frac{1}{2}$.

Conclusion: la suite de fonctions $(h_n)_n$ converge simplement sur \mathbb{R} vers la fonction $h(x)$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1, 1[, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \pm 1, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les fonctions h_n sont toutes continues sur \mathbb{R} mais la fonction h ne l'est pas, la convergence ne peut donc pas être uniforme (une limite uniforme de fonctions continues est continue).

Exercice 3. Pour tout $n \geq 1$, on note $f_n(x)$ la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \frac{ne^x}{n+x}$. On va montrer que cette suite de fonctions converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction $f(x)$ que l'on précisera. La convergence étant uniforme, on aura alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{n+x} dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

On voit facilement que, pour tout $x \in [0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ne^x}{n+x} = e^x$. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge donc simplement sur $[0, 1]$ vers $f(x) = e^x$. De plus, pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{ne^x}{n+x} - e^x \right| = \left| \frac{xe^x}{n+x} \right| \leq \frac{e}{n},$$

et donc $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{e}{n}$. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n} = 0$, la suite de fonction $(f_n)_n$ converge vers $f(x) = e^x$ uniformément sur $[0, 1]$.

Finalement, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{n+x} dx = \int_0^1 e^x dx = e - 1.$$