**Université Pierre et Marie Curie** **Année 2007-2008**

Master 1 - Mathématiques-Section B

Probabilités Approfondies

**Série d'exercices N°7**

**Chaînes de Markov (fin)**

**Exercice 1** On considère une chaîne de Markov $(X_n)$ dans $E = \{1, 2, 3\}$ avec matrice de transition

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les classes de récurrence/transience ?
2. Calculer une mesure de probabilité invariante et dire si elle est unique et si elle est réversible.
3. Calculer pour tout $x \in E$ le temps moyen de retour à $x$, $\mathbb{E}_x(S_x)$.
4. Calculer la période de tout $x \in E$. Quelle est la limite des probabilités de transition $Q^n(x, y)$, quand $n \to \infty$ ?

**Exercice 2** On considère une chaîne de Markov $(X_n, n \geq 0)$ dans $E = \{1, 2, 3\}$ avec matrice de transition

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

1. Classer les états. Quelles sont les classes de récurrence/transience ?
2. Calculer la matrice potentielle $U$ comme la plus petite solution non-négative de $U = I + QU$ et en déduire la valeur de $\mathbb{E}_x(N_y)$ pour tous $x, y \in E$, où $N_y$ est le nombre de visite de $X$ à $y$ (utiliser autant que possible le résultat de la question 1).
3. Calculer la plus petite solution non-négative $v : E \mapsto \mathbb{R}_+$ de l'équation

$$v(x) = 1 + Qv(x), \quad x \in \{2, 3\}, \qquad v(1) = 0.$$

   En déduire la valeur de $\mathbb{E}_x(T_{\{1\}})$ pour tout $x \in E$, où $T_{\{1\}}$ est le premier temps de visite de $X$ à l'état 1.
4. Calculer une mesure de probabilité invariante et dire si elle est unique.
5. Soit $T_{\{1,2\}}$ le premier temps de visite de $X$ à l'ensemble $\{1, 2\}$. Quelle est la loi de $T_{\{1,2\}}$ sous $\mathbb{P}_3$ ?
6. Remarquer que $\mathbb{E}_3(T_{\{1,2\}}) = \mathbb{E}_3(N_3)$. Quelle est la raison ?

**Exercice 3** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, X_n, P_x)$ une chaîne de Markov canonique à valeurs $E$ dénombrable, de matrice de transition $Q$, de matrice potentielle $U$. Soient $x, y, z \in E$. Prouver que

$$\begin{aligned} E_x\Big(1\!\!1_{\{T_y<+\infty\}} \sum_{n \geq T_y} 1\!\!1_{\{X_n=z\}}\Big) &= P_x(T_y < +\infty) U(y,z) \\ &= \frac{U(x,y)}{U(y,y)} U(y,z) \ \text{(si } y \text{ transient).} \end{aligned}$$

**Exercice 4** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs $\{0,1\}$ de même loi : $P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = 1/2$. On s'intéresse aux blocs de 3 zéros consécutifs sans compter 2 fois 2 blocs de 3 zéros consécutifs qui se chevauchent. Lorsqu'il y a 2 blocs de 3 zéros consécutifs qui se chevauchent, on compte seulement le premier.
On note $N_n$ le nombre de blocs comptés entre les instants 1 et $n$. On veut calculer la limite de la fréquence empirique de ces blocs, i.e. la limite p.s. de $N_n/n$. Pour ce faire on utilise une chaîne de Markov $Y = (Y_n)_{n\geq 0}$ à 4 états $0, 1, 2, 3$, d'état initial 0 (0 état de repos) qui mémorise le nombre de zéros consécutifs et retombe à l'état de repos lorsqu'on a compté 3 zéros consécutifs. Par exemple : si $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, \cdots) = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \ldots)$, alors $(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7, \ldots) = (1, 0, 1, 2, 3, 1, 0, \ldots)$ et $N_7 = 1 = \sum_{k=1}^{7} 1\!\!1_{\{Y_k=3\}}$.
La matrice de transition $Q$ de la chaîne $Y$ est donnée par :

$$\begin{aligned} Q(0,0) &= Q(0,1) = \frac{1}{2} \\ Q(1,0) &= Q(1,2) = \frac{1}{2} \\ Q(2,0) &= Q(2,3) = \frac{1}{2} \\ Q(3,0) &= Q(3,1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1. Vérifier que la chaîne $Y$ est irréductible récurrente positive. Calculer sa probabilité invariante.
2. En déduire la limite p.s. de $N_n/n$.

**Exercice 5** (Produit de 2 chaînes indépendantes).
Soient $X = (X_n)$ et $Y = (Y_n)$ deux chaînes de Markov canoniques indépendantes d'espaces d'états $E$ et $F$, de matrice de transition $Q$ et $R$ respectivement. La chaîne produit est par définition la chaîne $Z = (Z_n)$ où $Z_n = (X_n, Y_n)$. On vérifie sans peine que la chaîne $Z$ est une chaîne de Markov de matrice de transition

$$S\big((x,y),(x',y')\big) = Q(x,x')R(y,y'), \quad x, x' \in E,\ y, y' \in F.$$

1. Exprimer les coefficients de $S^n$ en fonction des coefficients de $P^n$ et $Q^n$.

2. Montrer que si $X$ et $Y$ sont irréductibles de période 1, alors la chaîne $Z = (Z_n)$ est irréductible de période 1.
3. Donner un contre-exemple pour lequel $X$ et $Y$ sont irréductibles de période 2 et pour lequel $Z$ n'est pas irréductible.
4. Supposons que $Q$ et $R$ admettent des probabilités invariantes respectives $\rho$ et $\sigma$. Trouver une probabilité invariante $\pi$ pour la chaîne produit.
5. On considère un damier à 16 cases (numérotées successivement de 1 à 16 de gauche à droite, de haut en bas ; les cases sont de couleur noire ou blanche alternée) sur lequel se déplacent indépendamment l'une de l'autre deux souris ; chaque souris passe d'une case à l'une des $k$ cases voisines avec la probabilité $1/k$ (les déplacements diagonaux sont proscrits).
6. Quel est l'intervalle de temps moyen séparant deux rencontres successives sur la case 7 ?

**Exercice 6** On considère la chaîne de Markov d'espace d'états $\mathbb{N}$ et de matrice de transition $Q$ définie par

$$Q(i,0) = q_i \text{ et } Q(i,i+1) = p_i \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{N}$$

où, pour tout $i$, $p_i + q_i = 1$, $p_i > 0, q_i > 0$.

1. Vérifier que la chaîne est irréductible.
2. A quelle condition sur les $p_i$ existe-t-il une mesure invariante. Dans ce cas prouver que la chaîne est récurrente.
3. Sous quelle condition sur les $p_i$ la chaîne est-elle récurrente positive ?