

Série d'exercices N°6
Chaînes de Markov (début)

Exercice 1

Soient E un ensemble dénombrable, (X_n) la suite des applications coordonnées de $\Omega = E^{\mathbb{N}}$ dans E , θ l'opérateur de translation et θ_n la suite de ses itérés. Pour $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{F}_n est la tribu engendrée par X_0, X_1, \dots, X_n . Soient S et T deux temps d'arrêt de la filtration \mathcal{F}_n .

(Cf. cours)

1) Montrer que $\theta_n^{-1}(\mathcal{F}_m) \subset \mathcal{F}_{n+m}$.

2) a) Montrer que $R = T + S \circ \theta_T$ est un temps d'arrêt (sur $\{T = +\infty\}$ on pose $R = +\infty$).

b) Montrer que $X_S \circ \theta_T = X_R$ et $\theta_S \circ \theta_T = \theta_R$ sur $\{R < +\infty\}$.

c) Comparer $X_n \circ \theta_T$ et $X_T \circ \theta_n$, puis $\theta_n \circ \theta_T$ et $\theta_T \circ \theta_n$ sur $\{T \circ \theta_n < \infty\}$.

3) Interpréter le temps d'arrêt R lorsque S et T sont respectivement les temps d'entrée dans des parties A et B de E . Que peut-on dire si $A \subset B$?

Exercice 2

A une probabilité quelconque p sur \mathbb{N}^* on associe une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ à valeurs \mathbb{N} , de loi initiale δ_0 et de matrice de transition Q définie par :

$$Q(0, i) = p(i + 1), \quad Q(i, i - 1) = 1, \quad i \geq 1.$$

On pose $S = \inf\{n \geq 1; X_n = 0\}$, $= +\infty$ si \emptyset (temps de retour à l'origine).
Quelle est la loi de S ?

Exercice 3

Soit $X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, (X_n)_{n \geq 0}, P_x)$ une chaîne de Markov canonique à valeurs dans E dénombrable, de matrice de transition Q .

1) On suppose que la chaîne (X_n) a pour loi initiale μ . Soit T un temps d'arrêt tel que $P_\mu(T < +\infty) = 1$. Que peut-on dire de la suite $(X_{T+n})_{n \geq 0}$?

2) Soit S un temps d'arrêt tel que, pour tout $x \in E$, $P_x(S < +\infty) = 1$. On pose

$$S_0 = 0 \quad \text{et, pour } n \geq 0, \quad S_{n+1} = S_n + S \circ \theta_n.$$

a) Montrer que, pour tout $x \in E$, les S_n sont P_x -p.s. finis.

b) Montrer que la suite $(X_{S_n})_{n \geq 0}$ associée à la filtration $(\mathcal{F}_{S_n})_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov dont la matrice de transition est donnée par

$$Q_S(x, y) = P_x(X_S = y).$$

Exercice 4

Un joueur fréquente 3 casinos numérotés 1, 2 et 3. Chaque jour il choisit l'un des deux casinos où il n'est pas allé la veille suivant une même probabilité $\frac{1}{2}$. Le premier jour, jour 0, il choisit l'un des trois casinos suivant une loi de probabilité μ sur $\{1, 2, 3\}$.

On note X_n la v.a. égale au numéro du casino fréquenté par le joueur le jour n .

- 1) On considérera la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ comme une chaîne de Markov canonique dont on précisera la matrice de transition Q .
- 2) Calculer les puissances Q^n de Q , puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q^n$.
- 3) Calculer les $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_\mu(X_n = j)$, $j = 1, 2, 3$.
- 4) Montrer que, pour $\mu = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ est une suite stationnaire.

Exercice 5

Une souris effectue une suite de déplacements aléatoires, indépendants les uns des autres entre trois pièces numérotées 1, 2 et 3. La règle des déplacements est alors la suivante : lorsque la souris est dans la pièce 1, elle y reste avec la probabilité $\frac{1}{3}$ ou bien passe dans l'une des deux autres pièces suivant la même probabilité $\frac{1}{3}$; lorsque la souris est dans la pièce 2, elle y reste avec la probabilité $\frac{1}{2}$ ou passe dans la pièce 3 avec la probabilité $\frac{1}{2}$; lorsque la souris est dans la pièce 3, elle y reste.

On note X_0 le numéro de la pièce initialement occupée par la souris (X_0 peut être aléatoire : on note μ la loi de X), X_n , $n \geq 1$, le numéro de la pièce occupée par la souris après son n -ième déplacement.

- 1) On considérera $(X_n)_{n \geq 0}$ comme une chaîne de Markov canonique dont on précisera la matrice de transition Q .
- 2) Diagonaliser Q .
- 3) En déduire les $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_\mu(X_n = j)$, $j = 1, 2, 3$.
- 4) On pose $T = \inf\{n \geq 0; X_n = 3\}$. Montrer que $P_\mu(T < +\infty) = 1$.

Exercice 6

On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, (X_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$, processus adapté à valeurs dans $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ tel que

$$X_0 = 1 \quad \text{p.s.}$$

et pour tout $n \geq 0$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1 | \mathcal{F}_n) = e^{-X_n}, \quad \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 0 | \mathcal{F}_n) = 1 - e^{-X_n}.$$

1. Prouver que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov sur \mathbb{N}^* et calculer sa matrice de transition $(Q(x, y) : x, y \in \mathbb{N}^*)$.
2. Montrer que p.s. $X_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ existe. Calculer $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ et montrer que $\mathbb{E}(X_\infty) = +\infty$ par l'absurde.
3. Pour tout $n \geq 0$ calculer $\mathbb{P}(X_n = 1)$.
4. Pour tous $n \geq m \geq 0$ calculer $\mathbb{P}(X_n = X_m | \mathcal{F}_m)$.

5. Calculer pour tout $m \geq 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = X_m).$$

6. En déduire que

$$\mathbb{P}(\liminf_n \{X_{n+1} = X_n\}) = 0, \quad \mathbb{P}(\limsup_n \{X_{n+1} = X_n + 1\}) = 1$$

et $\mathbb{P}(X_\infty = +\infty) = 1$.

Exercice 7

Soient $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite iid de variables de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ et $X_0 := 0, X_n := Y_1 + \dots + Y_n$. Remarquer que $X_{n+1} \geq X_n$ p.s. pour tout n . Soit pour tout $y \in \mathbb{N}$ le temps d'arrêt $T_y := \inf\{n \geq 0 : X_n = y\}$ ($\inf \emptyset := \infty$).

1. Montrer, à l'aide de la loi des grands nombres, que $\lim_n X_n = +\infty$ p.s. et en déduire que $\mathbb{P}(T_y < +\infty) = 1$.
2. Montrer que $M_n := X_n - np$ est une martingale par rapport à la filtration (\mathcal{F}_n) engendrée par (X_n) .
3. Calculer $\mathbb{E}(T_y)$, en utilisant la martingale arrêtée $(M_{n \wedge T_y})$.

Soit $N_y := \sum_{k=0}^{\infty} 1_{(X_k=y)}$ le nombre de visites de (X_n) à $y \in \mathbb{N}$.

4. Calculer $1_{(X_k=y)}$ pour $k < T_y, T_y \leq k < T_{y+1}$ et $k \geq T_{y+1}$, respectivement. En déduire que $N_y = T_{y+1} - T_y$ p.s. et la valeur de $\mathbb{E}(N_y)$.

On remarque que (X_n) est une marche aléatoire avec matrice de transition Q donnée par : $Q(x, x) = 1 - p, Q(x, x + 1) = p, x \in \mathbb{N}$ (on ne demande pas de le prouver). On peut supposer que la chaîne (X_n) est donnée sous forme canonique.

5. Calculer la loi de X_n et la loi de T_1 .
6. Prouver, à l'aide de la loi de Markov forte et du point 4, que N_y a même loi que T_1 .
7. Calculer la loi de T_y .

Exercice 8

Dans cet exercice on considère une suite indépendante (X_n) de variables géométriques de paramètre $p \in]0, 1[$, qui modélisent (par exemple) la durée d'un stock d'ampoules. Les ampoules sont numérotées à partir de 0; elles sont allumées toutes au même instant; X_n est la durée de l'ampoule n .

On définit les temps des records successifs de durée des ampoules :

$$\tau_0 := 0, \quad \tau_{n+1} := \inf\{k > \tau_n : X_k > X_{\tau_n}\}, \quad n \geq 0,$$

et les records successifs $Z_n := X_{\tau_n}, n \geq 0$. Donc Z_n est l'éniesième record de durée que l'on rencontre dans la suite (X_n) . Dans la suite on considère une chaîne de Markov (X_n) dans \mathbb{N}^* sous forme canonique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, X_n, (\mathbb{P}_x)_{x \in \mathbb{N}^*})$ avec matrice de transition

$$Q(x, y) = q^{y-1} p, \quad x, y \in \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer que sous \mathbb{P}_x la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ est indépendante, X_n est une variable géométrique de paramètre p pour tout $n \geq 1$, et $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$.
2. Soit $x \in \mathbb{N}^*$ fixé. Calculer

$$\mathbb{P}_x(X_1 \leq x, \dots, X_{k-1} \leq x, X_k > y), \quad k, y \in \mathbb{N}^*, y \geq x.$$

3. On définit $\tau := \inf\{n \geq 1 : X_n > X_0\}$, $\inf \emptyset := +\infty$. Calculer

$$\mathbb{P}_x(\tau = k, X_k > y), \quad k, y \in \mathbb{N}^*, y \geq x.$$

Montrer que, sous \mathbb{P}_x , τ est une variable géométrique avec un paramètre que l'on déterminera et que X_τ a la même loi que $x + X_1$. Le couple (τ, X_τ) est-il indépendant sous \mathbb{P}_x ?

4. Montrer que $\pi(x) = q^{x-1}p$, $x \in \mathbb{N}^*$, est la seule mesure de probabilité invariante pour Q . Montrer que $\mathbb{P}_\pi(\tau < +\infty) = 1$ et $\mathbb{E}_\pi(\tau) = +\infty$.
5. Montrer que τ est un temps d'arrêt. On peut dans la suite utiliser le fait que pour les temps τ_n définis ci-dessus l'on a $\tau_{n+1} = \tau_n + \tau \circ \theta_{\tau_n}$ et donc τ_n est aussi un temps d'arrêt (fini \mathbb{P}_x -p.s. pour tout $x \in \mathbb{N}^*$).
6. Montrer que $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov dans \mathbb{N}^* sous \mathbb{P}_x par rapport à la filtration (\mathcal{F}_{τ_n}) . Calculer sa matrice de transition et sa loi initiale.
7. Calculer pour toute fonction bornée $f : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{R}$ l'espérance conditionnelle de $f(Z_{n+1} - Z_n)$ sachant \mathcal{F}_{τ_n} . Montrer que la suite $(Z_n - Z_{n-1})_{n \geq 1}$ est i.i.d. sous \mathbb{P}_x .
8. Calculer la limite \mathbb{P}_x -presque sûre de Z_n/n , pour tout $x \in \mathbb{N}^*$.