

Série d'exercices N°5
Martingales (suite)

Exercice 1

Question de cours

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ un espace de probabilité filtré. Redémontrer que, pour tout $a > 0$,

(i) si X_n est une surmartingale positive,

$$aP\left(\sup_{n \geq 0} X_n \geq a\right) \leq E(X_0),$$

(ii) si X_n est une sous-martingale positive,

$$aP\left(\sup_{0 \leq k \leq n} X_k \geq a\right) \leq \int_{\{\sup_{0 \leq k \leq n} X_k \geq a\}} X_n dP \leq E(X_n).$$

Exercice 2

On sait que, pour une martingale X_n bornée dans L^2 , $E((\sup_n |X_n|)^2) \leq 4 \sup_n E(X_n^2)$ (cf. théorème 5.3.2.) : par suite, $\sup_n |X_n| \in L^2$.

Dans cet exercice on se propose de prouver que, si $|X_n| \ln^+(|X_n|)$ est bornée dans L^1 , alors $\sup_n |X_n| \in L^1$.

Soit donc X_n une martingale.

1) Montrer que, pour $u \geq 1$, $\frac{1}{u} \ln u \leq \frac{1}{e}$.

2) A partir de l'inégalité (ii) (cf. exercice 7 précédent) appliquée à la sous-martingale $|X_n|$ montrer que

$$\int_1^\infty P\left(\sup_{0 \leq k \leq n} |X_k| \geq a\right) da \leq \int_\Omega |X_n| \ln^+\left(\sup_{0 \leq k \leq n} |X_k|\right) dP.$$

3) Conclure que

$$E\left(\sup_{n \geq 0} |X_n|\right) \leq \frac{e}{1-e} \left(1 + \sup_{n \geq 0} E(|X_n| \ln^+ |X_n|)\right).$$

Exercice 3

Question de cours

Soit X_n une sous-martingale (définie sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$). Redémontrer que X_n s'écrit de manière unique sous la forme

$$X_n = M_n + A_n$$

où M_n est une martingale et A_n un processus croissant prévisible (i.e. $0 = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n \leq \dots$ et, pour $n \geq 1$, A_n est \mathcal{F}_{n-1} -mesurable).

(Deux exemples de décomposition de Doob)

Exemple 1

Soit $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ une suite de v.a.r. indépendantes (définies sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P)) de carré intégrable et de même loi centrée. On pose $X_0 = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ et, pour $n \geq 1$, $X_n = Y_1 + \dots + Y_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$.
 1) Montrer que X_n est une martingale de carré intégrable et déterminer la décomposition de Doob de la sous-martingale X_n^2 (on posera $\sigma^2 = E(Y_1^2)$).
 2) Soit T un temps d'arrêt (pour la filtration \mathcal{F}_n) intégrable. Montrer que la martingale $X_{T \wedge n}$ est bornée dans L^2 . En déduire que $E(X_T^2) = E(T)\sigma^2$.

Exemple 2

On garde les hypothèses et notations précédentes. On suppose en particulier que les v.a. Y_n ont pour loi commune : $P(Y_n = -1) = P(Y_n = 1) = 1/2$.
 On pose

$$M_0 = 0 \text{ et, pour } n \geq 1, M_n = \sum_{k=1}^n \text{sgn}(X_{k-1})Y_k$$

où $\text{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$, $= -1$ si $x < 0$, $= 0$ si $x = 0$.

- 1) Montrer que M_n est une martingale de carré intégrable et déterminer la décomposition de Doob de la sous-martingale M_n^2 ?
- 2) Quelle est la décomposition de Doob de la sous-martingale $|X_n|$?
- 3) Montrer que M_n est $\sigma(|X_1|, \dots, |X_n|)$ -mesurable.

Exercice 4

Soit $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale définie sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) . Soient τ et σ deux temps d'arrêt de la filtration (\mathcal{F}_n) , tels que $\sigma \leq \tau$, p.s. Montrer que pour toute fonction f convexe telle que $E(|f(X_n)|) < +\infty$, on a

$$\begin{aligned} X_{\sigma \wedge n} &= E(X_{\tau \wedge n} | \mathcal{F}_\sigma) \\ f(X_{\sigma \wedge n}) &\leq E(f(X_{\tau \wedge n}) | \mathcal{F}_\sigma). \end{aligned}$$

Exercice 5

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels. On pose :

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n), \quad M_n = \exp \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k X_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \right\}, \quad n \geq 1.$$

1. Montrer que M_n est une \mathcal{F}_n -martingale et que M_n converge p.s.
2. On suppose que $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k^2 = +\infty$. Montrer que $\lim_n M_n = 0$, p.s. La martingale M_n est-elle régulière?

Exercice 6

Soient Y_1, \dots, Y_n, \dots une suite de v.a.r. indépendantes telles que, pour tout $n \geq 1$, $P(Y_n = 1) = p$, $P(Y_n = -1) = q = 1 - p$, avec $0 < p < 1$. On pose

$$S_0 = 0, \quad S_n = Y_1 + \dots + Y_n, \quad n \geq 1, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \dots, S_n)$$

et, pour tout θ réel,

$$\phi(\theta) = E(e^{\theta Y_1}), \quad X_n = \frac{e^{\theta S_n}}{\phi(\theta)^n}.$$

- 1) Donner le tableau de variation de la fonction $\theta \mapsto \phi(\theta)$.
- 2) Montrer que X_n est une martingale et que, dans le cas où $\theta \neq 0$, X_n converge p.s. vers 0.
- 3) Soit $T = \inf \{n > 0; S_n = 1\}$. Montrer que, pour $\theta > \max(0, \ln(q/p))$, $E(\phi(\theta)^{-T} \mathbb{I}_{\{T < +\infty\}}) = e^{-\theta}$, en déduire que

$$E(s^T \mathbb{I}_{\{T < +\infty\}}) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2qs} \quad (0 \leq s \leq 1)$$

et $P(T < +\infty) = 1$ si $p \geq q$, $= p/q$ si $p < q$.

Exercice 7

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré, $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. de carré intégrable adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ et $(\sigma_n^2)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs. On suppose que, pour tout $n \geq 1$,

$$E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0 \text{ p.s. et } E(X_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) = \sigma_n^2 \text{ p.s.}$$

On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$

- 1) Montrer que S_n est une martingale de carré intégrable.
- 2) Quelle est la décomposition de Doob de la sous-martingale S_n^2 ?
- 3) Montrer que, si $\sum_k \sigma_k^2 < +\infty$, S_n converge p.s. et dans L^2 .
- 4) On suppose que S_n converge p.s. vers une limite finie et qu'il existe une constante M telle que, pour tout $n \geq 1$, $|X_n| \leq M$ p.s. Pour $a > 0$ on pose $T_a = \inf \{n \geq 0; |S_n| > a\}$, $= +\infty$ si \emptyset .
 - a) Montrer que, pour tout n , $E(S_{n \wedge T_a}^2) = E(A_{n \wedge T_a})$.
 - b) Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $P(T_a = +\infty) > 0$.
 - c) En déduire que $\sum_k \sigma_k^2 < +\infty$.
- 5) En considérant le cas particulier où les X_n sont indépendantes et de lois respectives $P(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n^2}$ et $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$, vérifier que la conclusion de la question 4) est en défaut.

Exercice 8

Soit X une variable réelle de loi $(0, \sigma^2)$, $\sigma^2 \in]0, +\infty[$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, η_k une variable réelle de loi $(0, \varepsilon_k^2)$, $\varepsilon_k > 0$, telles que la famille $\{X, \eta_0, \eta_1, \dots\}$ soit indépendante. On définit $Y_k = X + \eta_k$, $k \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, \dots, Y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_\infty = \sigma(Y_n, n \geq 0)$.

Nous essayons de mesurer une quantité aléatoire X avec une suite indépendante d'expériences. L'expérience k donne comme résultat $Y_k = X + \eta_k$, où η_k est une erreur qui dépend de la précision des instruments. Après n expériences, la meilleure prévision possible sur X est

$$X_n := \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X | Y_0, \dots, Y_n).$$

On se demande s'il est possible d'obtenir la valeur de X quand n tend vers l'infini, et notamment si X_n converge vers X .

1. Montrer que (X_n) est une martingale et que X_n converge p.s. et dans L^1 vers une variable X_∞ . Quelle est la relation entre X et X_∞ ?
2. Montrer que (X_n) est bornée dans L^2 . Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
a) $X_n \rightarrow X$ dans L^2 ; b) $X_n \rightarrow X$ dans L^1 ; c) X est \mathcal{F}_∞ -mesurable.
3. Calculer $\mathbb{E}(Y_i Y_j)$, $\mathbb{E}(Y_i^2)$ et $\mathbb{E}(X Y_i)$ pour $i, j \geq 0$, $i \neq j$. Montrer que pour tout $n \geq 0$ et $i = 0, \dots, n$ l'on a $\mathbb{E}(Z_n Y_i) = 0$, où

$$Z_n := X - \frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2 \sum_{k=0}^n \varepsilon_k^{-2}} \sum_{j=0}^n \varepsilon_j^{-2} Y_j.$$

4. Montrer que pour tout $n \geq 0$ la variable Z_n est indépendante de $\{Y_0, \dots, Y_n\}$ et en déduire que $X_n = X - Z_n$.
5. Calculer $\mathbb{E}((X - X_n)^2)$ et montrer que $X_n \rightarrow X$ dans L^2 si et seulement si $\lim_n \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^{-2} = +\infty$.
6. Discuter le cas $\varepsilon_i = \varepsilon > 0$ pour tout $i \geq 0$, notamment les liens avec la loi des grands nombres.

Exercice 9

(Un jeu de cartes à un seul joueur). On prend un jeu de 52 cartes, on les retourne une à une; le joueur peut, une et une seule fois au cours du jeu, dire "rouge la prochaine!", il gagne si la carte suivante est rouge, sinon il perd. On se demande quelles sont les stratégies de jeu qui optimisent la probabilité de victoire.

1. Soit R_n , $n = 0, \dots, 51$, le nombre de cartes rouges encore dans le jeu après avoir retourné n cartes. Soit A_n l'événement {la n -ième carte retournée est rouge}. Calculer $\mathbb{P}(A_{n+1} | R_n = j)$, pour $j \in \{0, \dots, 26\}$, $n \in \{0, \dots, 50\}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(R_{n+1} = j | R_n) = \mathbb{P}(R_{n+1} = j | \mathcal{F}_n)$, où $\mathcal{F}_n := \sigma(R_0, \dots, R_n)$, $n \in \{0, \dots, 50\}$, $j \in \{0, \dots, 26\}$. Montrer que

$$\mathbb{E}(R_{n+1} | \mathcal{F}_n) = R_n - \frac{R_n}{52 - n}, \quad n = 0, \dots, 50.$$

Montrer que $X_n := R_n/(52 - n)$, $n = 0, \dots, 50$, est une martingale par rapport à la filtration (\mathcal{F}_n) et que $X_n = \mathbb{P}(A_{n+1} | \mathcal{F}_n)$.

- On définit $\tau = n \in \{0, \dots, 51\}$ si le joueur dit “rouge la prochaine !” avant de retourner la $(n + 1)$ -ième carte. Montrer que τ est un temps d’arrêt et que la probabilité de victoire est $\mathbb{E}(X_\tau)$. Montrer que, pour toute stratégie, la probabilité p de victoire dans ce jeu est toujours la même et calculer p .

Exercice 10

On considère un jeu de hasard entre un joueur et le croupier d’un casino. Le capital total en jeu est 1 : après l’ n ième partie le capital du joueur est $X_n \in [0, 1]$ et le capital du croupier est $1 - X_n$. Au début le capital du joueur est une constante $X_0 = p \in]0, 1[$ et le capital du croupier est $1 - p$.

La règle du jeu est que, après les n premières parties, la probabilité pour le joueur de gagner l’ $(n + 1)$ -ième partie est X_n , et la probabilité de perdre est $1 - X_n$; si le joueur gagne, il obtient la moitié du capital du croupier ; s’il perd, il cède la moitié de son capital au croupier.

Ce qui se traduit en formule : pour toute $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ borélienne bornée,

$$\mathbb{E}(f(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = X_n \cdot f\left(X_n + \frac{1 - X_n}{2}\right) + (1 - X_n) \cdot f\left(\frac{X_n}{2}\right) \quad (1)$$

où (\mathcal{F}_n) est la filtration naturelle de (X_n) .

- Prouver que (X_n) est une martingale.
- Prouver que X_n converge p.s. et dans L^2 vers une variable Z .
- Prouver que $\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = \mathbb{E}(3X_n^2 + X_n)/4$. En déduire que $\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(Z) = p$.
- Prouver que toute variable aléatoire W , telle que $0 \leq W \leq 1$ et $\mathbb{E}(W(1 - W)) = 0$, est une variable de Bernoulli. En déduire la loi de Z .
- Pour tout $n \geq 0$, soit $Y_n := 2X_{n+1} - X_n$. Calculer, à l’aide de la formule (1), la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant \mathcal{F}_n . En déduire que

$$\mathbb{P}(Y_n = 0 | \mathcal{F}_n) = 1 - X_n, \quad \mathbb{P}(Y_n = 1 | \mathcal{F}_n) = X_n,$$

et en déduire la loi de Y_n .

- Considérer les événements $G_n := \{Y_n = 1\}$, $P_n := \{Y_n = 0\}$. Prouver que $Y_n \rightarrow_n Z$ p.s. et en déduire que

$$\mathbb{P}\left(\liminf_n G_n\right) = p, \quad \mathbb{P}\left(\liminf_n P_n\right) = 1 - p.$$

La suite (Y_n) est-elle indépendante ?

- Quelle est l’interprétation des résultats des points 4, 5 et 6 en termes de victoire/perte du joueur ?

Exercice 11

On considère un jeu de hasard d’un joueur au casino. Le capital initial du joueur

est de a euros, où $a \in \mathbb{N}$ est une constante et $a \geq 1$. Après l'énième partie le capital du joueur est $X_n \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$.

Si, après la énième partie, le capital X_n est 0, le joueur a perdu tout son argent et ne peut plus jouer (donc $X_{n+1} = X_n = 0$). Si $X_n \geq 1$, le joueur mise un nombre entier d'euros, qu'il choisit uniformément entre 1 et X_n ; la probabilité pour le joueur de gagner la $(n+1)$ -ième partie est $1/2$, et la probabilité de perdre est $1/2$; si le joueur gagne, il reçoit la somme mise, sinon il cède la même somme.

Ce qui se traduit en formule : si $(\mathcal{F}_n)_n$ est la filtration naturelle de $(X_n)_n$, alors pour tout $n \geq 0$ et pour toute $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ borélienne et bornée :

$$\mathbb{E}(f(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = 1_{(X_n=0)} \cdot f(0) + 1_{(X_n>0)} \cdot \frac{1}{2X_n} \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{k=1}^{X_n} f(X_n + \sigma k).$$

1. Prouver que $(X_n)_n$ est une martingale.
2. Prouver que X_n converge p.s. vers une variable Z p.s. finie.
3. Soit G_n l'événement $\{X_{n+1} = X_n\}$. Montrer qu'on a l'égalité d'événements

$$\{ \text{la suite } X_n \text{ est constante à partir d'un certain rang} \} = \liminf_n G_n.$$

4. En tenant compte que les variables $(X_n)_n$ prennent seulement des valeurs entières, déduire de la question 2 que $\mathbb{P}(\liminf_n G_n) = 1$.
5. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n > 0 \text{ et } X_{n+1} = X_n) = 0$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ p.s. $\{X_{n+1} = X_n\} \subseteq \{X_n = 0\}$ et que $\mathbb{P}(\liminf_n \{X_n = 0\}) = 1$.
6. Conclure que $Z = 0$ p.s.
7. Quelle est l'interprétation des résultats des questions précédentes en termes de victoire/perte du joueur ?

Dans les questions qui suivent, on peut supposer connus les résultats des questions 1, 2 et 6 ci-dessus.

- A. La suite $(X_n, n \geq 0)$ est-elle uniformément intégrable? Converge-t-elle dans L^1 ?
- B. La suite $(\sqrt{X_n}, n \geq 0)$ est-elle uniformément intégrable? Converge-t-elle dans L^1 ?
- C. La suite $(X_n^2, n \geq 0)$ est-elle bornée dans L^1 ?

Exercice 12

On considère un jeu de hasard où à chaque partie la probabilité de gagner pour le joueur décroît fortement, mais au même temps en cas de victoire le gain croît aussi fortement. Plus précisément, la suite des gains est une suite indépendante (Y_n) telle que :

$$\mathbb{P}(Y_n = e^n - 1) = e^{-n}, \quad \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1 - e^{-n}, \quad \forall n \geq 1.$$

Soient X_n, S_n définis par

$$\begin{aligned} X_0 &= 0, & X_n &= Y_1 + \cdots + Y_n, & n &\geq 1, \\ S_0 &= 0, & S_n &= \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}, & n &\geq 1. \end{aligned}$$

X_n est donc le capital du joueur après l'énième partie.

1. Montrer que (X_n) est une martingale et calculer $\mathbb{E}(Y_n)$, $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{E}(S_n)$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_n \{Y_n \neq -1\}) = 0$.
3. Montrer que

$$\liminf_n \{Y_n = -1\} \subset \left\{ \lim_n S_n = -1 \right\} \subset \left\{ \lim_n X_n = -\infty \right\}$$

et en déduire que p.s. S_n converge vers -1 et X_n converge vers $-\infty$.

4. La loi des grands nombres est-elle valide pour la suite (Y_n) ? Pourquoi?
5. Calculer pour tout $n \geq 1$ la distance entre S_n et -1 dans L^1 et dans L^2 (remarquer que $Y_n \geq -1$ p.s.).
6. Remarquer que $\lim_n S_n \in L^1$ mais $\mathbb{E}(\lim_n S_n) \neq \lim_n \mathbb{E}(S_n)$ et commenter. Les suites (S_n) et (X_n) sont-elles uniformément intégrables?
7. Quelle est l'interprétation des résultats précédents pour le joueur? Le jeu est-il "équitable"?