Université Pierre et Marie Curie
Master 1 - Mathématiques-Section B
Probabilités Approfondies

Année 2008-2009
Télé-enseignement

Série d'exercices N°4
Filtrations, temps d'arrêt,
martingales (début)

Exercice 1
Soient $(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité filtré, T et S deux temps d'arrêt, $\mathcal{F}_T$ et $\mathcal{F}_S$ les tribus respectives des événements antérieurs à T et S.
Montrer que (cf. cours)
(i) $S \wedge T$, $S \vee T$, $S + T$ sont des temps d'arrêt.
(ii) Si T est un temps d'arrêt constant ($T = p$ avec $p \in \mathbb{N}$), alors $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_p$,
(iii) Si $S \leq T$, $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$,
(iv) $\mathcal{F}_{S \wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$,
(v) $\{S < T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$, $\{S = T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.

Exercice 2
On considère une suite $(X_n)_{n \geq 0}$ de v.a. définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs $[0, 1]$, indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose, pour $n \geq 0$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n)$. On introduit la v.a.

$$T = \inf\{n \geq 1;\ X_n > X_0\},\ = +\infty \text{ si } \emptyset.$$

1) Montrer que T est un temps d'arrêt de la filtration $\mathcal{F}_n$.
2) Déterminer la loi de T. Calculer son espérance.

Exercice 3
Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a.r. définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}, P)$. On suppose que $(X_n)_{n \geq 0}$ est adaptée à la filtration $\mathcal{F}_n$. Soit $\mathcal{T}_b$ l'ensemble des temps d'arrêt bornés de la filtration $\mathcal{F}_n$. Montrer que, pour tout $\lambda > 0$,

$$P\left(\sup_{n \geq 0} |X_n| > \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} \sup_{T \in \mathcal{T}_b} E(|X_T|).$$

Exercice 4
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, X_n, P)$ un processus réel adapté.
a) On suppose que X_n est une martingale, resp. une surmartingale, resp. une sous-martingale.
Que peut-on dire sur les $E(X_n)$?
b) On désigne par $\mathcal{T}_b$ l'ensemble des temps d'arrêt bornés. Montrer que X_n est une martingale, resp. une surmartingale, resp. une sous-martingale ssi $E(X_T)$

est constant sur $\mathcal{T}_b$, resp. décroissant sur $\mathcal{T}_b$, resp. croissant sur $\mathcal{T}_b$.

Exercice 5
On considère l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ où $\Omega = \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$, $P(\{n\}) = 1/n - 1/(n+1)$, $\mathcal{F}_n = \sigma\big(\{1\}, \ldots, \{n\}, [n+1, +\infty[\big)$. On considère la suite de v.a.r. $X_n = (n+1)\mathbb{1}_{[n+1,+\infty[}$.
1) Montrer que, pour la filtration $\mathcal{F}_n$, X_n est une martingale positive. Vérifier que $X_n \to 0$ p.s. X_n converge-t-elle dans L^1 ?
2) Quelle est la valeur de $\sup_{n\geq 0} X_n(k),\ k \in \mathbb{N}^*$? En déduire $E\big(\sup_{n\geq 0} X_n\big)$.

Exercice 6
Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi de Bernoulli : $P(U_n = 1) = p$, $P(U_n = 0) = q = 1 - p$, $0 < p < 1$. On pose

$$T = \inf\{n \geq 0 \ ;\ U_n = 1\}, \quad T = +\infty \text{ si } U_n = 0 \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Pour $n \geq 0$ on pose $X_n = \dfrac{1}{q^n}\mathbb{1}_{\{T>n\}}$.

1) Montrer que X_n est une martingale (on précisera la filtration $\mathcal{F}_n$).
2) Montrer que X_n converge p.s. vers 0.
3) La martingale X_n est-elle bornée dans L^1 ? Dans L^2 ?
4) La martingale X_n est-elle régulière ?
5) La suite $Y_n = \sqrt{X_n}$ est-elle uniformément intégrable ?

Exercice 7
Soient X_n et Y_n deux martingales de carré intégrable définies sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$.
a) Montrer que, pour $n \geq m$, $E(X_m Y_n | \mathcal{F}_m) = X_m Y_m$ p.s. et donc en particulier que $E(X_m X_n | \mathcal{F}_m) = X_m X_m$ p.s.
b) Montrer que, pour $m < n \leq p < q$, $\mathrm{Cov}(X_n - X_m, Y_q - Y_p) = 0$.
c) Montrer que

$$E((X_n - X_0)^2) = \sum_{k=1}^{n} E((X_k - X_{k-1})^2)$$

(Cf. proposition 4.4.1. du polycopié).

Exercice 8
Soit $Y_1, \ldots, Y_n, \ldots$ une suite de v.a. à valeurs $\mathbb{Z}$ indépendantes, les Y_n, $n \geq 1$, ayant même loi :

$$P(Y_n = -1) = q, \qquad P(Y_n = 1) = p, \qquad \text{avec } p + q = 1,\ 0 < p < q < 1.$$

On pose $X_0 = 0$, $Z_0 = 1$, et pour $n \geq 1$, $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $Z_n = \left(\dfrac{q}{p}\right)^{X_n}$.
1) Montrer que Z_n est une martingale positive. Vérifier que $X_n \to -\infty$ p.s.

2) On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $T_k = \inf\{n \geq 0 \; ; \; X_n \geq k\}$. En considérant la martingale $(Z_{T_k \wedge n})$ et la décomposition

$$Z_{T_k \wedge n} = Z_{T_k \wedge n} \mathbb{1}_{\{T_k < +\infty\}} + Z_{T_k \wedge n} \mathbb{1}_{\{T_k = +\infty\}}$$

montrer que

$$P(T_k < +\infty) = \left(\frac{p}{q}\right)^k.$$

3) En déduire que

$$E(\sup_{n \geq 0} X_n) = \frac{p}{q-p}.$$

Exercice 9

Soit $(Y_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a.r. ≥ 0 définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ indépendantes et de même espérance 1. On pose, pour $n \geq 0$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, \ldots, Y_n)$ et $X_n = Y_0 \ldots Y_n$.
1) Montrer que X_n, resp. $\sqrt{X_n}$, est une $\mathcal{F}_n$-martingale, resp. surmartingale.
2) Montrer que le produit infini $\prod_{k=0}^{+\infty} E(\sqrt{Y_k})$ converge dans $\mathbb{R}_+$. On note l sa limite.
3) On suppose que $l = 0$. Montrer que $\sqrt{X_n} \to 0$ p.s. La martingale (X_n) est-elle régulière ?
4) On suppose $l > 0$. Montrer que $\sqrt{X_n}$ est une suite de Cauchy dans L^2. En déduire que (X_n) est régulière.

<u>Application</u>

Soient p et q deux probabilités distinctes sur un ensemble dénombrable E et (Z_n) une suite de v.a. indépendantes à valeurs E de même loi q.
On suppose que, pour tout $x \in E$, $q(x) > 0$. On pose

$$X_n = \frac{p(Z_0)}{q(Z_0)} \cdots \frac{p(Z_n)}{q(Z_n)}.$$

A partir de ce qui précède, montrer que $X_n \to 0$ p.s.