Université Pierre et Marie Curie **Année 2008-2009**

Master 1 - Mathématiques-Section B

Probabilités Approfondies

Série d'exercices N°3
Espérances et lois conditionnelles

Exercice 1

(Questions de cours)

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, A un événement et X une v.a.r. positive, resp. intégrable.

1) Soit $B \in \mathcal{A}$ tel que l'on ait $P(B) > 0$ et $P(B^c) > 0$. On introduit la sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ définie par : $\mathcal{B} = \{\Omega, \emptyset, B, B^c\}$. Donner

- les probabilités conditionnelles de A sachant B, de A sachant B^c.
- la probabilité conditionnelle de A sachant $\mathcal{B}$.
- l'espérance conditionnelle de X sachant B, de X sachant B^c.
- l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$.

2) Soit $(B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots)$ une partition dénombrable finie ou non de Ω dans $\mathcal{A}$ telle que les $P(B_1), P(B_2), \ldots, P(B_k), \ldots$ soient > 0. On introduit la sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ engendrée par la suite $(B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots)$. Donner

- la probabilité conditionnelle de A sachant $\mathcal{B}$.
- l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$.

3) Soit Y une v.a.r. discrète prenant les valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$ Donner

- la probabilité conditionnelle de A sachant Y.
- l'espérance conditionnelle de X sachant Y.

Exercice 2

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, X et Y des v.a.r., T une v.a. à valeurs $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Que peut-on dire, sous réserve d'hypothèses convenables, des espérances conditionnelles suivantes :

a) $E(f(T)|T)$ avec $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ borélienne ;

b) $E(X|T)$ avec X $\sigma(T)$-mesurable, $E(X|\mathcal{B})$ avec X $\mathcal{B}$-mesurable ;

c) $E(XY|T)$ avec X $\sigma(T)$-mesurable, $E(XY|\mathcal{B})$ avec X $\mathcal{B}$-mesurable ;

d) $E(X|T)$ quand X et T sont indépendantes, $E(X|\mathcal{B})$ quand X et $\mathcal{B}$ sont indépendantes ;

e) $E(E(X|T))$, $E(E(X|\mathcal{B}))$.

Exercice 3

Soit A un événement d'une tribu $\mathcal{F}$ sur un espace Ω muni d'une probabilité P et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On considère $B = \{\omega : E(\mathbb{1}_A \,|\, \mathcal{G})(\omega) \neq 0\}$ montrer que $A \subset B$, presque sûrement.

Exercice 4 :

Soit X une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de carré intégable et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Que peut-on dire de X si $(E(X \,|\, \mathcal{G}))^2 = E(X^2 \,|\, \mathcal{G})$?

Exercice 5 :
Soient X et Y deux v.a.r. définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et intégrables. On suppose que $E(X \mid Y) = Y$, p.s. et $E(Y \mid X) = X$, p.s. Montrer que $X = Y$, p.s. (On examinera d'abord le cas où X et Y sont de carré intégrable).

Exercice 6
Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes. Soit φ une fonction mesurable de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ positive ou bien telle que $E(|\varphi(X,Y)|) < +\infty$.
1) Montrer que

$$E[\varphi(X,Y) \mid X = x] = E[\varphi(x,Y)] \,.$$

2) On désigne par μ_X la loi de X et par $N(x, dz)$ la loi conditionnelle de $Z = \varphi(X,Y)$ sachant que $X = x$. Montrer que $N(x, dz)$ est égale μ_X-p.s. à la loi de la v.a. $\varphi(x,Y)$.

Exercice 7
Soit $Z = (X,Y)$ un vecteur aléatoire gaussien à valeurs $\mathbb{R}^2$. On suppose que $E(X) = E(Y) = 0$, $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 1$ et que $\mathrm{Cov}(X,Y) = \rho$ avec $|\rho| \neq 1$. On pose $U = X - \rho Y$, $V = \sqrt{1-\rho^2}\,Y$.
1. Quelles sont les lois de U et V ? Les v.a. U et V sont-elles indépendantes ?
2. Calculer $E(U^2V^2)$, $E(UV^3)$, $E(V^4)$. En déduire $E(X^2Y^2)$.

Exercice 8
Soient X_1, X_2, X_3 trois v. a. r. gaussiennes centrées réduites indépendantes. On pose $U = 2X_1 - X_2 - X_3$, $V = X_1 + X_2 + X_3$, $W = 3X_1 + X_2 - 4X_3$.
1. Quelles sont les lois de U, V et W ? Quels sont les couples de v.a. indépendantes parmi les couples (U,V), (U,W), (V,W) ?
2. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $W = aU + Z$ avec U et Z indépendantes. En déduire $E(W \mid U = u)$.

Exercice 9
Soient X et Y deux v. a. r. gaussiennes centrées réduites indépendantes. On pose $Z = X + Y$, $W = X - Y$.
1. Montrer que Z et W sont indépendantes. Quelle est la loi de W ?
2. En déduire l'espérance conditionnelle et la loi conditionnelle de X sachant Z.
3. Calculer $E(XY \mid Z)$ et $E(XYZ \mid Z)$.

Exercice 10
Soient X_1 et X_2 des v.a. indépendantes, de lois exponentielles de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
1) Calculer

$$E[\max(X_1, X_2) \mid X_1] \,.$$

2) Calculer $E[\max(X_1, X_2)]$.

Exercice 11
Soient X_1, …, X_n des v.a.r. indépendantes intgrables de même loi. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Quelles sont les espérances conditionnelles des X_k sachant S_n ?

Exercice 12
Soit X une v.a.r. symétrique intégrable. On pose $Y = |X|$.
a) Montrer que $E(X|Y) = E(X)$.
b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 13
Soient X_1 et X_2 des v.a. indépendantes, de loi binomiale de paramètres respectifs (n_1, p) et (n_2, p).
1) Déterminer la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2 = n$.
2) Déterminer l'espérance conditionnelle $E(X_1|X_1 + X_2)$.
3) Mêmes questions en supposant que X_1 et X_2 sont des v.a. indépendantes, de loi de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.

Exercice 14
Soient X_1, ..., X_n des v.a.r. indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
1) Quelle est la densité $f(s|x)$ de la loi conditionnelle de S_n sachant $X_1 = x$?
2) Quelle est la densité $f(x, s)$ de la loi du couple (X_1, S_n) ?
3) Calculer l'espérance conditionnelle de X_1^2 sachant S_n.
4) Calculer l'espérance conditionnelle de X_1X_2 sachant S_n.

Exercice 15
Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.
1) Quelle est l'espérance conditionnelle de $(Y - X)^+$ sachant X ?
2) Quelle est la loi conditionnelle de $(Y - X)^+$ sachant X ?

Exercice 16
On pose $h(x) = \frac{1}{\Gamma(a+1)} e^{-x} x^{a-1}$ ($a > 0$ fixé) et $D = \{0 < y < x\}$. Soit

$$f(x, y) = h(x) \mathbb{1}_D(x, y).$$

1) Montrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.
On considère dans la suite un couple (X, Y) de v.a.r. de densité f.
2) Les v.a. X et Y/X sont-elles indépendantes ?
3) Quelle est la loi conditionnelle de Y sachant X ?
4) Soit U une v.a.r. indépendante du couple (X, Y) telle que $P(U = 1) = p$ et $P(U = 0) = 1 - p$. On pose $Z = UX + (1 - U)Y$. Quelle est l'espérance conditionnelle de Z sachant X ?

Exercice 17 : Soient U, V W trois v.a.r. gaussiennes centrées réduites. On pose

$$Z = \frac{U + VW}{\sqrt{1 + W^2}}.$$

1) Quelle est la loi conditionnelle de Z sachant W ?
2) En déduire que Z et W sont indépendantes et donner la loi de Z.