

Série d'exercices N°2
Convergence de suites de variables aléatoires

Exercice 1

Dans les cas suivants, quels sont les différents modes de convergence que la suite de v.a.r. $(X_n)_{n \geq 1}$ est susceptible de réaliser.

(a) $P(X_n = 1 - \frac{1}{n}) = P(X_n = 1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$.

(b) $P(X_n = \frac{1}{n}) = \frac{1}{2^n}$, $P(X_n = n) = 1 - \frac{1}{2^n}$.

(c) $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$, $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$.

(d) $P(X_n = 0) = 1 - p_n$, $P(X_n = 1) = p_n$, où les X_n sont supposées indépendantes ; dans ce cas, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la suite (p_n) pour que : (i) (X_n) converge p.s. ; (ii) (X_n) converge dans L^1 ; (iii) (X_n) converge en loi (i.e. $E(f(X_n)) \rightarrow_n E(f(X))$) pour toute application continue bornée f de \mathbb{R} dans \mathbb{R}).

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes à valeurs $\{-1, 1\}$ de même loi donnée par : $P(X_n = 1) = p$, $P(X_n = -1) = 1 - p$, $0 < p < 1$. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ pour $n \geq 1$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(S_n = 0)$.

2) Etudier $\sum_{n \geq 0} P(S_n = 0)$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 3

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes à valeurs $\{-1, 1\}$ de même loi donnée par : $P(X_n = -1) = P(X_n = +1) = 1/2$. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ pour $n \geq 1$. On veut montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'événement $\{S_n = k\}$ a lieu infiniment souvent p.s.

1) Peut-on appliquer le lemme de Borel-Cantelli ?

2) On pose $q_j = P(\sup_{n \geq 0} S_n \geq j)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. Vérifier que, pour tout $j \leq 0$, $q_j = 1$. En envisageant les deux valeurs possibles de X_1 montrer que, pour tout $j \geq 1$, $q_j = (q_{j-1} + q_{j+1})/2$.

3) En déduire que $q_j = 1$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et que $P(\limsup S_n = +\infty) = 1$.

4) Montrer que $P(\liminf S_n = -\infty) = 1$.

5) Conclure.

Exercice 4

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi. Montrer les

implications :

$$E(|X_1|) < +\infty \implies P(\limsup \{|X_n| \geq n\}) = 0,$$

$$E(|X_1|) = +\infty \implies P(\limsup \{|X_n| \geq n\}) = 1.$$

Indication - On pourra démontrer les inégalités suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} P(|X_1| \geq n) \leq \int_{\Omega} |X_1| dP \leq \sum_{n \geq 0} P(|X_1| \geq n).$$

Exercice 5

1) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. Montrer que, si pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{n \geq 0} P(|X_n - X| > \varepsilon) < +\infty$, alors $X_n \rightarrow_n X$, p.s.

2) Soient $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a.r indépendantes et X une v.a.r. On suppose que $X_n \rightarrow_n 0$ p.s. (resp. $X_n \rightarrow_n X$ p.s.). Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{n \geq 0} P(|X_n| > \varepsilon) < +\infty$ (resp. $\sum_{n \geq 0} P(|X_n - X| > \varepsilon) < +\infty$).

3) Conclure.

Exercice 6

Montrer qu'une suite de v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers une v.a. X si et seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|} dP = 0.$$

Exercice 7

1) Soit X_1, \dots, X_n, \dots une suite de v.a.r. indépendantes de même loi admettant un moment d'ordre 4. On pose $Z_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$. Montrer que Z_n tend vers EX_1 p.s. quand n tend vers l'infini (on demande en fait de démontrer dans un cas particulier la loi forte des grands nombres : cf. exercice 11 qui suit).

2) a) Etablir que, pour toute fonction continue f de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , on a :

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 \dots dx_n \rightarrow_n f\left(\frac{1}{2}\right), \quad (1)$$

b) En déduire que

$$\sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow_n f(p), \quad p \in [0, 1]. \quad (2)$$

c) Etablir que, pour toute fonction continue et bornée f de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}

$$\sum_{k \geq 0} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow_n f(\lambda), \quad \lambda \in]0, +\infty[. \quad (3)$$

Exercice 8

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. intégrables convergeant presque sûrement vers une v.a.r. X intégrable. On suppose de plus que $\lim_n E(|X_n|) = E(|X|)$. Montrer que la suite (X_n) converge vers X dans L^1 .

Exercice 9 (extrait du partiel du 20 novembre 2006)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. On suppose qu'il existe une v.a. $X \in L^1$ et une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels telles que X_n a même loi que $\lambda_n X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément intégrable et $P(X \neq 0) > 0$ alors $\sup |\lambda_n| < +\infty$.

2) Montrer que si $\sup |\lambda_n| < +\infty$ alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément intégrable.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Y_n une v.a.r. de densité $\alpha_n e^{-\alpha_n x} \mathbb{1}_{\{x > 0\}}$, $\alpha_n > 0$, et Z_n une v.a.r. gaussienne centrée de variance σ_n^2 ($\sigma_n \geq 0$).

3) Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sigma_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ pour que les suites $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soient uniformément intégrables.

4) Montre que si Y_n converge vers W en probabilité et $W \in L^1$ alors Y_n converge dans L^1 (calculer $E(e^{-Y_n})$ et montrer par l'absurde que la condition trouvée à la question 3) est satisfaite).

Exercice 10

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. uniformément intégrable. Montrer que la suite des moyennes $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ est à son tour uniformément intégrable.

Exercice 11

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes, de même loi. On suppose que $E(|X_1|) < +\infty$. On pose, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} S_n &= X_1 + \dots + X_n \\ Y_n &= \max(S_1 - a, S_2 - 2a, \dots, S_n - na) \\ \bar{Y}_n &= \max(S_2 - S_1 - a, S_3 - S_1 - 2a, \dots, S_{n+1} - S_1 - na) \\ Y &= \sup(S_1 - a, S_2 - 2a, \dots, S_n - na, \dots) \\ \bar{Y} &= \sup(S_2 - S_1 - a, S_3 - S_1 - 2a, \dots, S_{n+1} - S_1 - na, \dots) \end{aligned}$$

1) Montrer que les suites (Y_n) et (\bar{Y}_n) ont même loi. En déduire que $P(Y = +\infty) = P(\bar{Y} = +\infty)$

2) Déduire de la loi 0-1 que $P(Y = +\infty) = 0$ ou 1.

3) Prouver la relation $Y_{n+1} - \bar{Y}_n = \max(X_1 - a - \bar{Y}_n, X_1 - a)$.

4) En déduire que $E(X_1) < a$ implique $Y < +\infty$ p.s.

5) (Loi forte des grands nombres). Conclure que S_n/n converge p.s. et dans L^1 vers $E(X_1)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 12

Soient (X_n) une suite de vecteurs aléatoires à valeurs \mathbb{R}^d , X un vecteur aléatoire à valeurs \mathbb{R}^d et f une fonction continue de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} .

1) On suppose que la suite (X_n) converge vers X en probabilité. Montrer que $f(X_n)$ converge vers $f(X)$ en probabilité.

2) En déduire que si (X_n) et (Y_n) sont deux suites de v.a.r. qui convergent en probabilité respectivement vers X et Y , alors les suites $(X_n + Y_n)$, $(X_n Y_n)$ convergent en probabilité respectivement vers $X + Y$, XY et, dans le cas où les Y_n et Y sont p.s. différentes de 0, la suite (X_n/Y_n) converge en probabilité vers X/Y .

N.B. On peut donner une démonstration immédiate du fait que $X_n + Y_n \rightarrow_n X + Y$ en probabilité : $P(|X_n + Y_n - (X + Y)| > \varepsilon) \leq P(|X_n - X| > \varepsilon/2) + P(|Y_n - Y| > \varepsilon/2)$, etc...

Exercice 13

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. de même loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose

$$T_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } X_n \leq \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{si } X_n > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

1) Montrer que la suite (T_n) converge en probabilité et trouver sa limite.

2) Vérifier que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\sum_{n \geq 1} P(|T_n^2 - 1| > \varepsilon) < +\infty$. En déduire la convergence presque sûre de la suite (T_n^2) .

Exercice 14

On rappelle que la fonction caractéristique φ_Y d'une v.a.r. Y est donnée par

$$\varphi_Y(t) = E(\exp(itY)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dans le cas où Y suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ on a : $\varphi_Y(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + itm\right)$.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. gaussiennes de moyennes m_n et de variance σ_n^2 . On suppose que la suite X_n converge en probabilité vers une v.a.r. X .

1) Montrer que $\sigma_n \rightarrow \sigma \in \mathbb{R}_+$ et $m_n \rightarrow m \in \mathbb{R}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

2) En déduire que X est une v.a. gaussienne (éventuellement dégénérée).

3) Exprimer $E(e^{X_n})$ et $E(e^{-X_n})$ à l'aide de m_n et σ_n^2 . En déduire que $\sup_n E(e^{|X_n|}) < +\infty$ puis que, pour tout $q \geq 1$, $\sup_n E(|X_n|^q) < +\infty$.

4) Montrer que X_n converge vers X dans L^p pour tout $p \geq 1$.