**Université Pierre et Marie Curie** **Année 2008-2009**

Master 1 - Mathématiques - Section B

Probabilités Approfondies

**Série d'exercices N°1**

**Espace de probabilité et variables aléatoires**

**Exercice 1**

1) Une urne contient $N$ boules numérotées de 1 à $N$. On tire successivement sans remise $n$ boules de l'urne ($1 \leq n \leq N$). Quel est l'ensemble $\Omega$ des résultats possibles ? Calculer card($\Omega$).

2) Désormais, on suppose que les résultats possibles sont équiprobables. Les boules numérotées de 1 à $M$ sont rouges ($M < N$) et les boules numérotées de $M+1$ à $N$ sont blanches. On introduit les événements $A_k$, $1 \leq k \leq n$, définis par : $A_k = \{$la $k$-ième boule tirée est rouge$\}$.

a) Calculer les $P(A_k)$.

b) Calculer, pour $k \neq l$, les $P(A_k \cap A_l)$.

3) On introduit les v.a. $Z_k$, $1 \leq k \leq n$, définies par : $Z_k = 1$ si la $k$-ième boule tirée est rouge, $Z_k = 0$ sinon. On pose $S_n = Z_1 + \cdots + Z_n$. On note $p$ le rapport $M/N$.

a) Calculer $\mathrm{Var}(S_n)$ en fonction de $n$ et $p$.

b) Calculer la limite de $\mathrm{Var}(S_n)$, $n$ fixé, quand $M$ et $N$ tendent vers l'infini de telle sorte que $p$ tende vers un réel $p_0$, $0 < p_0 < 1$.

**Exercice 2**

Soient $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ des événements d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{I}_{\cap_{k=1}^n A_k} = \prod_{k=1}^n \mathbb{I}_{A_k} .$$

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{I}_{\cup_{k=1}^n A_k} = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{I}_{A_k}) .$$

3) On pose $p_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$. Montrer que

$$P(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} p_k .$$

4) Un facteur répartit au hasard $n$ factures dans $n$ boîtes à lettres, une par boîte. On note $p(n)$ la probabilité qu'une facture au moins parvienne à son destinataire. Expliciter $p(n)$. Calculer $\lim_{n \to +\infty} p(n)$.

**Exercice 3**

Soit $X_1, \ldots, X_l, \ldots$ une suite de v.a. indépendantes à valeurs $\{0, 1\}$ de même loi : $P(X_1 = 1) = 1/N$, $P(X_1 = 0) = 1 - 1/N$, $N$ entier $\geq 2$ fixé. On pose $S_l = X_1 + \ldots + X_l$ et on introduit l'entier $n$ défini par

$$n = \inf\{l \geq 1 : P(S_l \geq 1) \geq 1/2\}.$$

1) Montrer que $n = [N \log 2]$ ou $n = [N \log 2] + 1$.

2) Quel est le nombre minimum de lancers d'un dé (à six faces) pour que la probabilité d'obtenir un as soit supérieure ou égale à $1/2$ ?
3) Le Chevalier de Méré (1607 - 1684) affirmait que le nombre minimum de lancers d'une paire de dés (à six faces) pour obtenir un double as avec une probabilité supérieure ou égale à $1/2$ était égal à six fois le nombre obtenu à la question 2). Commenter.

**Exercice 4**

Un document a été perdu. La probabilité pour qu'il se trouve dans un meuble est $p$, $0 < p < 1$. Ce meuble comporte sept tiroirs. On explore six tiroirs sans trouver le document. Quelle est la probabilité de le trouver dans le septième ?

**Exercice 5**

Soient $X$ et $Y$ deux v.a. indépendantes prenant toutes les valeurs entières entre 1 et $n$ suivant les probabilités : $P(X = k) = P(Y = k) = 1/n$, $k \in \{1, \cdots, n\}$.
Calculer $P(X = Y)$ et $P(X \geq Y)$. Déterminer la loi de $X - Y$.

**Exercice 6**

Soit $T$ une v.a. à valeurs $\mathbb{N}$ définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(T \geq n) > 0$ et, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $P(T \geq n + p \,|\, T \geq n) = P(T \geq p)$. Montrer que $T$ suit une loi géométrique.

**Exercice 7**

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on se donne une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de v.a. de Bernoulli de même paramètre $p$, $0 < p < 1$, indépendantes.

1) Soit $A_n = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \neq X_{n-1}(\omega)\}$, $n \geq 2$. Calculer $P(A_n \cap A_{n+1})$ pour $n \geq 2$. Montrer que les $A_n$ sont indépendants ssi $p = 1/2$.
2) Soit $\nu(\omega) = \inf\{n \geq 2 : \omega \in A_n\}$. Montrer que $\nu$ est une v.a. Quelle est la loi de $\nu$ ? Montrer que $P(\nu = +\infty) = 0$.

**Exercice 8**

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité. On considère $\varepsilon$ et $X$ des v.a.r. indépendantes définies sur cet espace. On suppose que $\varepsilon$ a pour loi : $P(\varepsilon = -1) = P(\varepsilon = +1) = 1/2$.

1) Montrer que $\varepsilon X$ et $\varepsilon$ sont indépendantes si et seulement si $X$ est symétrique.
2) Construire un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pour lequel il existe deux sous-tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ indépendantes et une v.a. $Y$ telle que :

(i) $Y$ est $\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$-mesurable,
(ii) $Y$ est indépendante de $\mathcal{B}$,
(iii) $Y$ n'est pas $\mathcal{A}$-mesurable.

3) Construire un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pour lequel il existe deux sous-tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ indépendantes et une v.a. $Z$ telle que :

(i) $Z$ est $\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$-mesurable,

(ii) $Z$ est indépendante de $\mathcal{B}$,

(iii) $Z$ est indépendante de $\mathcal{A}$.

**Exercice 9**

On considère $n$ v.a. indépendantes $X_1, \cdots, X_n$ à valeurs dans $\{1, 2, \cdots, r\}$ et de même loi donnée par : $P(X_1 = i) = p_i$, $1 \leq i \leq r$. On définit $Z_i = \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{X_j = i\}}$.

1) Déterminer la loi de $Z_1$. A quelle condition les v.a. $Z_i$ ont-elles même loi ?

2) Calculer la covariance de $Z_1$ et $Z_2$. Les v.a. $Z_1$ et $Z_2$ sont-elles indépendantes ?

**Exercice 10**

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles indépendantes et $\nu$ une v.a. à valeurs enti ‘eres indépendante de la suite $(X_n)$. On définit $S_\nu$ sur $\Omega$ par $S_\nu(\omega) = 0$ si $\nu(\omega) = 0$ et $S_\nu(\omega) = \sum_{n=1}^{\nu(\omega)} X_n(\omega)$ si $\nu(\omega) \geq 1$.

1) Montrer que $S_\nu$ est une v.a.

2) On suppose que les $X_n$ sont à valeurs entières et ont même loi. Déterminer la fonction génératrice de $S_\nu$ en fonction de celle de $\nu$ et de $X_1$.

3) En déduire l'espérance et la variance de $S_\nu$.

4) Trouver la loi de $S_\nu$ lorsque les $X_n$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p$, $0 < p < 1$, et que $\nu$ suit une loi géométrique de paramètre $a$, $0 < a < 1$.

**Exercice 11**

Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \cdots$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(\varepsilon_n = +1) = P(\varepsilon_n = -1) = 1/2\,.$$

1) Calculer, en fonction de $n$,

$$E[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n)^2].$$

2) Soit $a \in ]0, 1[$ fixé.

a) Montrer l'inégalité

$$P(|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n| \geq an) \leq \frac{1}{a^2 n}\,. \tag{1}$$

b) Montrer que

$$P(|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n| \geq an) = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{l=0}^{n} C_n^l \mathbb{1}_{\{|2l-n| \geq an\}}\right). \tag{2}$$

c) Conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\left(\sum_{l=0}^{n} C_n^l \mathbb{1}_{\{|2l-n| \geq an\}}\right) = 0. \tag{3}$$

3) Soit $N$ une variable aléatoire de Poisson, de paramètre $\theta > 0$, indépendante de la suite $(\varepsilon_n, n \geq 1)$. Calculer, en fonction de $\theta$,

$$E\left[\left(\sum_{n=1}^{N+1} \varepsilon_n\right)^2\right].$$

**Exercice 12**

Soit $L$ une v.a. strictement positive admettant une densité de probabilité $f$ et $X$ une v.a. de loi uniforme sur $]0,1[$ indépendante de $L$. On définit deux v.a. $L_1$ et $L_2$ par $L_1 = XL$ et $L_2 = (1-X)L$ (cela modélise par exemple la rupture d'une chaîne moléculaire de longueur initiale aléatoire $L$).

1) Déterminer la loi du couple $(L_1, L_2)$ ainsi que les lois de $L_1$ et $L_2$.
2) Que peut-on dire du couple $(L_1, L_2)$ lorsque $f(x) = \lambda^2 x \exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ $(\lambda > 0)$ ?
Déterminer la loi de $Z = \min(L_1, L_2)$ dans ce cas.

**Exercice 13**

Soit $(X_1, X_2)$ un couple de v.a. admettant la densité de probabilité:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)\right),$$

où $\rho \in [0,1[$.

1) Vérifier que $f$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$ et trouver les densités marginales de $X_1$ et $X_2$. A quelle condition les v.a. $X_1$ et $X_2$ sont-elles indépendantes?
2) On intoduit les coordonnées polaires $(R, \Phi)$ du couple $(X_1, X_2)$ : $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ et $\Phi \in [0, 2\pi[$ est définie par

$$\cos\Phi = \frac{X_1}{R} \quad \text{et} \quad \sin\Phi = \frac{X_2}{R} \text{ si } R > 0, \quad \Phi = 0 \text{ si } R = 0.$$

Déterminer la densité du couple $(R, \Phi)$, puis celle de $\Phi$.
3) Déterminer la densité de $R$ lorsque $\rho = 0$. Que peut-on dire des v.a. $R$ et $\Phi$ dans ce cas.

**Exercice 14**

On dit qu'une v.a.r $X$ suit une loi gamma de paramètre $a > 0$ si $X$ admet la densité $\frac{1}{\Gamma(a)} e^{-x} x^{a-1} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$.

1) Soit $U$ une v.a. de loi gamma de paramètre $a$. Calculer explicitement les moments $E(U^n)$, $n \in \mathbb{N}$.
2) Soient $U$ et $V$ deux v.a. indépendantes de loi gamma de paramètres respectifs $a$ et $b$. Montrer que les v.a. $U/(U+V)$ et $U+V$ sont indépendantes et expliciter la loi de $U/(U+V)$.

**Exercice 15**

Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r. bornées.
1) Montrer la formule

$$E(XY) - E(X)E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} [P(X \le x, Y \le y) - P(X \le x)P(Y \le y)]\, dy \right) dx\,. \tag{4}$$

<u>Indication</u> : Pour deux réels $M$ et $N$ suffisamment grands, on pourra considérer les quantités

$$E[(M-X)(N-Y)] \quad \text{et} \quad (M - E(X))(N - E(Y))$$

et utiliser, si $X \le M$, $M - X = \int_X^M dx$.
2) On suppose que $X = Y$ et que la loi de $X$ est la loi uniforme sur $[0,a]$. Vérifier l'égalité (4) en calculant séparément ses deux membres.

**Exercice 16**

Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des v.a. indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $S_0 = 0$ et, pour $k = 1, 2, \cdots, n$, $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$.

1) Déterminer la loi du vecteur aléatoire $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$.

2) Montrer que la v.a. $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ admet pour densité

$$f_{S_n}(s_n) = \lambda^n e^{-\lambda s_n} \frac{s_n^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{\{s_n > 0\}}.$$

3) Déterminer la fonction caractéristique de $S_n$.

4) Calculer de deux manières $E(S_n)$ et $\mathrm{Var}\,(S_n)$.