

Série d'exercices

Rappels sur les variables aléatoires

**Exercice 1**

1) Dans un porte-monnaie il y a un nombre aléatoire  $X$  de pièces. On suppose que  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$  et que les pièces ont toutes le même biais, donc la probabilité d'obtenir face est  $p \in ]0, 1[$  pour chaque pièce.

On tire toutes les pièces et on compte le nombre  $Y$  de faces. Calculer la loi de  $Y$  avec un calcul explicite et à l'aide des fonctions génératrices.

**Exercice 2**

On a  $n$  pièces, toutes avec le même biais (donc la probabilité d'obtenir face est  $p \in ]0, 1[$  pour chaque pièce). On tire les  $n$  pièces, on garde les faces et on retire les piles. Calculer la loi du nombre total de faces obtenu après le deuxième tirage.

**Exercice 3**

Soit  $(T_i)_{i \geq 1}$  une suite IID de variables exponentielles:  $P(T_i \geq t) = e^{-t}$ ,  $t \geq 0$ . Soit  $S_0 := 0$ ,  $S_n := T_1 + \dots + T_n$ . La suite  $(S_n)_n$  s'interprète comme les temps successifs de passage d'un bus par son terminus;  $T_i$  est donc le temps d'attente entre le passage  $(i - 1)$ -ième et le passage  $i$ -ième.

Si on arrive au terminus au temps  $t \geq 0$ , on peut définir les quantités:

1. Le nombre  $N_t$  de passages du bus avant  $t$ :

$$N_t := \sum_{n=1}^{\infty} 1_{(S_n \leq t)}, \quad t \geq 0.$$

2. Le temps d'attente du prochain bus

$$A_t := S_{N_t+1} - t, \quad t \geq 0.$$

3. Le temps passé entre le dernier passage avant  $t$  et le premier passage après  $t$

$$C_t := S_{N_t+1} - S_{N_t}, \quad t \geq 0.$$

Montrer par récurrence que la densité de  $S_n$  est, pour  $n \geq 1$ ,

$$\frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} dx, \quad x \geq 0.$$

Montrer que  $\{N_t = n\} = \{S_n \leq t, S_{n+1} > t\}$ . En déduire la loi de  $N_t$ ,  $A_t$  et  $C_t$ .

Remarquer que  $A_t$  et  $T_i$  ont même loi, alors que  $C_t$  a une loi différente: est-ce surprenant? Quelle en est l'explication?