PARTIEL 29 octobre 2009

Probabilités approfondies MM011

Durée 2h. Documents interdits

Exercice 1. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables uniformes sur $[0,1]$ et $(Y_n)_n$ une suite indépendante de variables de Bernoulli, telle que Y_n a paramètre $p_n \in [0,1]$ et les suites $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_n$ sont indépendantes. Soit $X_n := Y_n U_n$.

1. Montrer que $X_n \to 0$ en probabilité si et seulement si $\lim_n p_n = 0$.
2. Montrer que si $\sum_n p_n < +\infty$ alors p.s. $\lim_{n\to+\infty} X_n = 0$.
3. Montrer que si $\sum_n p_n = +\infty$ alors $\mathbb{P}(X_n \geq 1-\varepsilon \text{ infiniment souvent}) = 1$ pour tout $\varepsilon > 0$ et en déduire que p.s. $\limsup_{n\to+\infty} X_n = 1$.
4. Montrer que si $\sum_n p_n = +\infty$ alors pour tout $x \in [0,1]$ p.s. il existe une sous-suite aléatoire $(n_k)_k$ telle que $X_{n_k} \to x$.
5. Montrer que si $\sum_n p_n = +\infty$ alors p.s. pour tout $x \in [0,1]$ il existe une sous-suite aléatoire $(n_k)_k$ telle que $X_{n_k} \to x$.

Exercice 2. On a une population de taille fixée $N \in \mathbb{N}^*$ qui se renouvelle entièrement à chaque génération et dont chaque individu est de type a ou A. Chaque individu de la génération $n+1$ choisit son (seul) parent de la génération n de façon uniforme et indépendante des autres individus et hérite le type du parent.

On note X_n le nombre d'individus de type a dans la génération n et $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, \dots, X_n)$. On a alors que la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $\mathcal{F}_n$ est une variable binomiale de paramètres $(N, X_n/N)$. On suppose que p.s. $X_0 = k \in \{0, \dots, N\}$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale et discuter la convergence de X_n vers une variable X_∞ quand $n \to +\infty$.
2. Montrer que $M_n := \left(\frac{N}{N-1}\right)^n X_n(N - X_n)$ est une martingale.
3. Calculer $\mathbb{E}(X_\infty)$ et $\mathbb{E}(X_\infty(N - X_\infty))$.
4. Calculer la loi de X_∞ et commenter.

Exercice 3. Soit $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. telle que $\mathbb{P}(\sigma_n = 1) = \mathbb{P}(\sigma_n = -1) = 1/2$. Introduire une martingale opportune pour montrer la convergence p.s. de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{n}.$$

Corrigé

Solution de l'exercice 1. On remarque que $X_n \in [0,1]$ p.s. pour tout n.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = \mathbb{P}(Y_n = 1, U_n > \varepsilon)$ et par l'indépendance $\mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = p_n(1-\varepsilon)$. On a donc que $X_n \to 0$ en probabilité ssi $\lim_n p_n = 0$.
2. Soit $A_n := \{Y_n = 1\}$. Puisque $\mathbb{P}(A_n) = p_n$, si $\sum_n p_n < +\infty$ alors par Borel-Cantelli $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$, i.e. $\mathbb{P}(\liminf_n \{Y_n = 0\}) = 1$. Donc p.s. $X_n = Y_n U_n = 0$ à partir d'un certain rang. Il s'en suit que p.s. $\lim_n X_n = 0$.
3. Soit $\varepsilon \in]0,1[$ et $B_n := \{X_n > 1-\varepsilon\}$. Par l'indépendance $\mathbb{P}(X_n > 1-\varepsilon) = p_n\varepsilon$. En outre la suite $(B_n)_n$ est indépendante. Par Borel-Cantelli, si $\sum_n p_n = +\infty$ alors $\mathbb{P}(\limsup_n B_n) = 1$, i.e. p.s. $1 \geq \limsup_{n\to+\infty} X_n \geq 1-\varepsilon$. Par intersection dénombrable on voit que $1 \geq \limsup_{n\to+\infty} X_n \geq 1-\varepsilon$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}\cap]0,1[$ et donc p.s. on a $\limsup_{n\to+\infty} X_n = 1$.
4. Si $x = 1$, on a déjà prouvé le résultat. Soit donc $x \in [0,1[$. On raisonne comme dans le point précédent mais en considérant $B_n = \{X_n \in [x, x+\varepsilon]\}$, avec ε suffisamment petit pour que $[x, x+\varepsilon] \subset [0,1]$. La suite $(B_n)_n$ est indépendante et $\sum_n \mathbb{P}(B_n) = \sum_n p_n\varepsilon = +\infty$. Par Borel-Cantelli, $\mathbb{P}(\limsup_n B_n) = 1$, i.e. p.s. il existe une suite $(n_k)_k$ telle que $X_{n_k} \in [x, x+\varepsilon]$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}\cap]0,1[$, on a par intersection dénombrable que p.s. il existe une sous-suite (m_k) telle que $|X_{m_k} - x| \leq 1/k$ et on a conclu.
5. Par intersection dénombrable et par le point précédent, p.s. pour tout $x \in \mathbb{Q}\cap[0,1]$ il existe une sous-suite aléatoire $(n_k)_k$ telle que $X_{n_k} \to x$. Soit $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ et $x_n \in \mathbb{Q}\cap[0,1]$ tel que $x_n \to x$. P.s. il y a pour chaque n une suite $(k_{n,m})_m$ telle que $\lim_m X_{k_{n,m}} = x_n$. Soit $m(n)$ un entier tel $|X_{k_{n,m(n)}} - x_n| \leq 1/n$. Alors on obtient que
$$|X_{k_{n,m(n)}} - x| \leq |x - x_n| + 1/n \to 0.$$
On a donc trouvé la suite souhaitée.

Solution de l'exercice 2. La variable X_n prend ses valeurs p.s. dans $[0,N]$ et est donc intégrable pour tout n. En outre, par définition X_n est adapté à sa tribu naturelle $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. On rappelle que la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $\mathcal{F}_n$ est une variable binomiale de paramètres $(N, X_n/N)$.

1. L'espérance d'une variable binomiale de paramètres (N,p) est Np. Dans ce cas on a donc

$$\mathbb{E}(X_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n) = N\cdot X_n/N = X_n.$$

Puisque $|X_n| \le N$ pour tout N, on a $\sup_n \mathbb{E}(X_n^2) \le N^2$ et donc la martingale est bornée dans L^2. Par un théorème du cours, X_n converge vers une variable X_∞ p.s. et dans L^2.

2. On remarque que $|M_n| \le \left(\frac{N}{N-1}\right)^n N^2$, i.e. M_n est bornée et donc intégrable. Comme fonction de X_n, M_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et donc le processus est bien adapté.

Si Y est une variable binomiale de paramètres (N,p), on a

$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathrm{Var}(Y) + (\mathbb{E}(Y))^2 = Np(1-p) + (Np)^2.$$

Dans notre cas, si $p_n := X_n/N$, on obtient

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^2\,|\,\mathcal{F}_n) = N\cdot X_n/N(1-p_n) + (N\cdot X_n/N)^2 = X_n(1-p_n) + X_n^2.$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1}(N-X_{n+1})\,|\,\mathcal{F}_n) &= NX_n - X_n(1-p_n) - X_n^2\\ &= X_n(N-X_n)\left(1-\frac{1}{N}\right) = X_n(N-X_n)\,\frac{N-1}{N}\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{E}(M_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{N}{N-1}\right)^{n+1} X_{n+1}(N-X_{n+1})\;\middle|\;\mathcal{F}_n\right) = M_n.$$

3. Puisque M_n est une martingale, on a que $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(M_0)$, i.e.

$$\mathbb{E}(X_n(N-X_n)) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n \mathbb{E}(X_0(N-X_0)), \qquad n \ge 0.$$

Puisque $X_n \to X_\infty$ p.s. et que $|X_n| \le N$, par convergence dominée le terme à gauche converge vers $\mathbb{E}(X_\infty(N-X_\infty))$. Le terme à droite converge vers 0, et donc $\mathbb{E}(X_\infty(N-X_\infty)) = 0$. Par convergence dominée on obtient aussi $\mathbb{E}(X_\infty) = \mathbb{E}(X_0) = k$.

4. Puisque $X_\infty \in [0, N]$ alors $X_\infty(N - X_\infty) \geq 0$. Mais $\mathbb{E}(X_\infty(N - X_\infty)) = 0$, donc p.s. $X_\infty(N - X_\infty) = 0$, i.e. p.s. $X_\infty \in \{0, N\}$. Or

$$k = \mathbb{E}(X_\infty) = 0 \cdot \mathbb{P}(X_\infty = 0) + N \cdot \mathbb{P}(X_\infty = N),$$

donc $\mathbb{P}(X_\infty = N) = k/N$ et donc $\mathbb{P}(X_\infty = 0) = 1 - k/N$.

Solution de l'exercice 3. On introduit $\mathcal{F}_n := \sigma(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ et

$$M_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k}{k}.$$

On a que $\mathbb{E}(\sigma_n) = 0$. Par l'indépendance des $(\sigma_n)_{n\geq 1}$, M_n est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale et

$$\mathbb{E}\left(M_n^2\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\frac{\sigma_n^2}{k^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

La martingale $(M_n)_n$ est donc bornée dans L^2 et par suite elle converge p.s. et dans L^2 vers une variable $M_\infty \in L^2$. Nous avons donc obtenu la convergence p.s. de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k}{k}.$$