

PARTIEL 27 octobre 2008
Probabilités approfondies MM011

Durée 2h30. Documents interdits

1. Soit $(U_i)_{i \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables uniformes sur $[0, 1]$. Pour tout $p \in [0, 1]$ fixé on dénote

$$Y_i^p := \mathbb{1}_{\{U_i \leq p\}}, \quad i \geq 1,$$

où $\mathbb{1}_A$ est l'indicatrice de l'événement A . Montrer que $(Y_i^p)_{i \geq 1}$ est une suite i.i.d. de variables de Bernoulli de paramètre p .

2. Soit U_0 une variable uniforme sur $[0, 1]$ indépendante de $(U_i)_{i \geq 1}$ et

$$X_i := \mathbb{1}_{\{U_i \leq U_0\}} = Y_i^{U_0}, \quad i \geq 1.$$

Montrer que pour toutes $f : \{0, 1\}^n \mapsto \mathbb{R}$ et $g : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ boréliennes bornées on a

$$\mathbb{E}(f(X_1, \dots, X_n) g(U_0)) = \int_0^1 \mathbb{E}(f(Y_1^p, \dots, Y_n^p)) g(p) dp \quad (1)$$

et en déduire la loi conditionnelle de (X_1, \dots, X_n) sachant U_0 .

3. A l'aide de (1) calculer

$$\mathbb{P}(X_1 = \dots = X_n = 1),$$

$$\mathbb{P}(X_1 = \dots = X_n = 1 \mid U_0) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_1 = \dots = X_n = 1\}} \mid U_0)$$

pour $n \geq 1$. La suite $(X_i)_i$ est-elle indépendante ?

4. Soit

$$S_0 := 0, \quad S_n := X_1 + \dots + X_n.$$

A l'aide de (1) et de la formule

$$\int_0^1 p^i (1-p)^j dp = \frac{1}{(i+j+1) \binom{i+j}{i}}, \quad i, j \in \mathbb{N} \quad (2)$$

(qu'on admet, pour l'instant), trouver la loi de S_n . Calculer la loi conditionnelle de S_n sachant U_0 .

5. Calculer la moyenne et la variance de $(Y_1^p + \dots + Y_n^p)/n$. En déduire que S_n/n converge vers U_0 dans L^2 .

(tourner la page \longrightarrow)

6. Soit $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$, $n \geq 1$, $\mathcal{F}_\infty := \sigma(X_1, X_2, \dots)$. Pour quels $n \in \mathbb{N}$ la variable U_0 est-elle \mathcal{F}_n -mesurable? (Comparer les cardinaux de $\sigma(U_0)$ et \mathcal{F}_n) Est-elle \mathcal{F}_∞ -mesurable?
7. Soit $\mathcal{G}_0 := \sigma(U_0)$ et $\mathcal{G}_n := \sigma(U_0, X_1, \dots, X_n)$, pour $n \geq 1$. Montrer à l'aide de (1) que

$$\mathbb{E}(X_{n+1} F(U_0, X_1, \dots, X_n)) = \mathbb{E}(U_0 F(U_0, X_1, \dots, X_n))$$

pour toute $F : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}$ borélienne et bornée. En déduire que $(S_n - nU_0)_{n \geq 0}$ est une (\mathcal{G}_n) -martingale.

8. Montrer à l'aide des formules (1) et (2) que

$$\mathbb{E}(U_0 \mathbb{1}_A) = \frac{1}{(n+2) \binom{n+1}{k+1}} = \frac{1}{n+2} \mathbb{E}((S_n + 1) \mathbb{1}_A)$$

pour tout événement du type $A = \{X_i = x_i, i = 1, \dots, n\}$, avec $x_i \in \{0, 1\}$ et $k = \sum_{i=1}^n x_i$. En déduire $\mathbb{E}(U_0 | \mathcal{F}_n)$. Montrer que $(S_n)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale par rapport à (\mathcal{F}_n) et calculer sa décomposition de Doob.

9. Calculer $\mathbb{P}(\limsup_n \{|S_n/n - U_0| > \varepsilon\})$ pour $\varepsilon > 0$ et prouver que p.s. la suite S_n/n converge. Soit $\mathcal{T} := \{i \geq 1 : X_i = 1\} \subseteq \mathbb{N}^*$. Montrer que p.s. \mathcal{T} admet une *densité asymptotique*, c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\mathcal{T} \cap \{1, \dots, n\}|}{n} \in [0, 1] \quad \text{existe p.s.}$$

où $|A|$ dénote le nombre d'éléments (ou le cardinal) de $A \subseteq \mathbb{N}^*$.

10. Montrer la formule (2) par récurrence sur j .

Corrigé

1. Chaque variable a loi de Bernoulli :

$$\mathbb{P}(Y_i^p = 1) = \mathbb{P}(U_i \leq p) = \int_0^p du = p,$$

$$\mathbb{P}(Y_i^p = 0) = \mathbb{P}(U_i > p) = \int_p^1 du = (1 - p).$$

La suite $(Y_i^p)_{i \geq 1}$ est indépendante, car la suite $(U_i)_{i \geq 1}$ est indépendante et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f_1, \dots, f_n : \{0, 1\} \mapsto \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f_1(Y_1^p) \cdots f_n(Y_n^p)) &= \mathbb{E}(f_1(\mathbb{1}_{\{U_1 \leq p\}}) \cdots f_n(\mathbb{1}_{\{U_n \leq p\}})) \\ &= \mathbb{E}(f_1(\mathbb{1}_{\{U_1 \leq p\}})) \cdots \mathbb{E}(f_n(\mathbb{1}_{\{U_n \leq p\}})) = \mathbb{E}(f_1(Y_1^p)) \cdots \mathbb{E}(f_n(Y_n^p)). \end{aligned}$$

2. Par le Théorème de Fubini et l'indépendance de U_0 et $(U_i)_{i \geq 1}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X_1, \dots, X_n) g(U_0)) &= \mathbb{E}(f(\mathbb{1}_{\{U_i \leq U_0\}}, i = 1, \dots, n) g(U_0)) \\ &= \int_0^1 \mathbb{E}(f(\mathbb{1}_{\{U_i \leq p\}}, i = 1, \dots, n)) g(p) dp \\ &= \int_0^1 \mathbb{E}(f(Y_i^p, i = 1, \dots, n)) g(p) dp. \end{aligned}$$

On en déduit que la loi conditionnelle de $(X_i, i = 1, \dots, n)$ sachant U_0 est la loi d'une famille i.i.d. de Bernoullis de paramètre U_0 par la proposition 3.5.4 du polycopié.

3. Par (1) on a pour $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = \dots = X_k = 1) &= \int_0^1 \mathbb{P}(Y_1^p = \dots = Y_k^p = 1) dp = \int_0^1 p^k dp \\ &= \frac{1}{k+1}, \end{aligned}$$

et pour toute $g : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ borélienne et bornée

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_1 = \dots = X_k = 1\}} g(U_0)) = \int_0^1 p^k g(p) dp$$

donc par la proposition 3.3.2 du polycopié

$$\mathbb{P}(X_1 = \dots = X_k = 1 | U_0) = U_0^k.$$

La suite $(X_i)_i$ n'est pas indépendante car

$$\mathbb{P}(X_1 = X_2 = 1) = \frac{1}{3} \neq \mathbb{P}(X_1 = 1) \mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

4. Pour tout $n \geq 1$, $(Y_1^p + \dots + Y_n^p)$ est une Binomiale de paramètres (n, p) . Donc, pour $k \in \{0, \dots, n\}$, par (1) et (2)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n = k) &= \int_0^1 \mathbb{P}(Y_1^p + \dots + Y_n^p = k) dp = \binom{n}{k} \int_0^1 p^k (1-p)^{n-k} dp \\ &= \frac{\binom{n}{k}}{(n+1)\binom{n}{k}} = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Sachant U_0 , les variables (X_1, \dots, X_n) sont i.i.d. et de Bernoulli de paramètre U_0 . Donc, sachant U_0 , $S_n = X_1 + \dots + X_n$ est une Binomiale de paramètres (n, U_0) .

Pour la loi de S_n , on peut aussi raisonner avec une espérance conditionnelle

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n = k) &= \mathbb{E}(\mathbb{P}(S_n = k | U_0)) = \mathbb{E} \left(\binom{n}{k} U_0^k (1 - U_0)^{n-k} \right) \\ &= \binom{n}{k} \mathbb{E} (U_0^k (1 - U_0)^{n-k}) = \frac{\binom{n}{k}}{(n+1)\binom{n}{k}} = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Donc la loi de S_n est uniforme sur $\{0, \dots, n\}$.

5. On a $\mathbb{E}(Y_i^p) = p$, $\text{Var}(Y_i^p) = p(1-p)$, $\text{Var}((Y_1^p + \dots + Y_n^p)/n) = p(1-p)/n$. On obtient que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_n}{n} - U_0 \right)^2 \right] &= \int_0^1 \mathbb{E} \left[\left(\frac{\mathbb{1}_{\{U_1 \leq p\}} + \dots + \mathbb{1}_{\{U_n \leq p\}}}{n} - p \right)^2 \right] dp \\ &= \int_0^1 \left(\frac{Y_1^p + \dots + Y_n^p}{n} - p \right)^2 dp = \int_0^1 \frac{p(1-p)}{n} dp = \frac{1}{6n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

6. La tribu engendrée par U_0 est infinie, car elle contient tous les événements disjoints $\{\frac{1}{n+1} \leq U_0 < \frac{1}{n}\}$, alors que \mathcal{F}_n est finie, car elle est formée par les événements du type $\{X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n\}$, avec $A_1, \dots, A_n \subseteq \{0, 1\}$, qui sont en nombre fini. Donc on ne peut pas avoir $\sigma(U_0) \subseteq \mathcal{F}_n$, et U_0 n'est \mathcal{F}_n -mesurable pour aucun $n \in \mathbb{N}$.
D'autre côté, par le point 5 on a que $S_n/n \rightarrow U_0$ dans L^2 et donc il existe une sous-suite $(n_k)_k$ telle que $S_{n_k}/n_k \rightarrow U_0$ p.s.. Puisque S_{n_k}/n_k est \mathcal{F}_∞ -mesurable, la limite U_0 l'est aussi.

7. Pour toute $F : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}$ borélienne et bornée on a par (1)

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(F(U_0, X_1, \dots, X_n) X_{n+1}) \\ &= \int_0^1 \mathbb{E}(F(p, \mathbb{1}_{\{U_1 \leq p\}}, \dots, \mathbb{1}_{\{U_n \leq p\}}) \mathbb{1}_{\{U_{n+1} \leq p\}}) dp \\ &= \int_0^1 \mathbb{E}(F(p, \mathbb{1}_{\{U_1 \leq p\}}, \dots, \mathbb{1}_{\{U_n \leq p\}}) p) dp = \mathbb{E}(F(U_0, X_1, \dots, X_n) U_0), \end{aligned}$$

car U_{n+1} est indépendant de (U_1, \dots, U_n) .

Donc on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(F(U_0, X_1, \dots, X_n) (S_{n+1} - (n+1)U_0)) \\ &= \mathbb{E}(F(U_0, X_1, \dots, X_n) (S_n + X_{n+1} - (n+1)U_0)) \\ &= \mathbb{E}(F(U_0, X_1, \dots, X_n) (S_n - nU_0)), \end{aligned}$$

ce qui implique que $\mathbb{E}(S_{n+1} - (n+1)U_0 | \mathcal{G}_n) = S_n - nU_0$, car $S_n - nU_0$ est bien \mathcal{G}_n -mesurable.

8. Soit $A := \{X_i = x_i, i = 1, \dots, n\}$ avec $x \in \{0, 1\}^n$. Alors, si $k = \sum_{i=1}^n x_i$, par (2)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_0 \mathbb{1}_A) &= \int_0^1 p \mathbb{P}(Y_i^p = x_i, i = 1, \dots, n) dp \\ &= \int_0^1 p p^k (1-p)^{n-k} dp = \frac{1}{(n+2) \binom{n+1}{k+1}}. \end{aligned}$$

D'autre côté

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+2} \mathbb{E}((S_n + 1) \mathbb{1}_A) &= \frac{k+1}{n+2} \mathbb{P}(A) = \frac{k+1}{n+2} \int_0^1 p^k (1-p)^{n-k} dp \\ &= \frac{k+1}{n+2} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} = \frac{1}{(n+2) \binom{n+1}{k+1}} = \mathbb{E}(U_0 \mathbb{1}_A). \end{aligned}$$

Puisque S_n est \mathcal{F}_n -mesurable, on obtient que

$$\mathbb{E}(U_0 | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(U_0 | X_1, \dots, X_n) = \frac{S_n + 1}{n + 2}.$$

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(U_0 \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}\left(\frac{S_n + 1}{n + 2} \mathbf{1}_A\right),$$

donc $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \frac{S_n + 1}{n + 2} \geq 0$ et $\mathbb{E}(S_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq S_n$. Donc $(S_n)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale par rapport à (\mathcal{F}_n) . Pour calculer sa décomposition de Doob on considère

$$A_n := \sum_{k=1}^n \mathbb{E}((S_k - S_{k-1}) | \mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k + 1}{k + 2}, \quad n \geq 1,$$

et donc $M_n := S_n - A_n$ est une martingale et $S_n = M_n + A_n$ est la décomposition de Doob de $(S_n)_n$ par rapport à (\mathcal{F}_n) .

9. Si S_n/n converge p.s. alors la variable limite est nécessairement U_0 , car $S_n/n \rightarrow U_0$ dans L^2 . Par la loi des grands nombres, pour tout $p \in [0, 1]$ la suite $\bar{Y}_n^p := (Y_1^p + \dots + Y_n^p)/n$ converge p.s. vers p . Donc pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\mathbb{P}\left(\limsup_n \{|\bar{Y}_n^p - p| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

Or par (1)

$$\mathbb{P}(\cup_{k=n}^m \{|S_k/k - U_0| > \varepsilon\}) = \int_0^1 \mathbb{P}(\cup_{k=n}^m \{|\bar{Y}_k^p - p| > \varepsilon\}) dp.$$

Si on fait tendre $m \rightarrow +\infty$ on obtient par convergence monotone

$$\mathbb{P}(\cup_{k \geq n} \{|S_k/k - U_0| > \varepsilon\}) = \int_0^1 \mathbb{P}(\cup_{k \geq n} \{|\bar{Y}_k^p - p| > \varepsilon\}) dp$$

et si on fait tendre $n \rightarrow +\infty$ on obtient encore par convergence monotone

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\limsup_n \{|S_n/n - U_0| > \varepsilon\}\right) &= \int_0^1 \mathbb{P}\left(\limsup_n \{|\bar{Y}_n^p - p| > \varepsilon\}\right) dp \\ &= \int_0^1 0 dp = 0. \end{aligned}$$

Donc S_n/n converge p.s. vers U_0 .

Finalement, il suffit de remarquer que $|\mathcal{T} \cap [0, n]| = S_n$ et donc par le résultat précédent

$$\frac{|\mathcal{T} \cap [0, n]|}{n} = \frac{S_n}{n} \rightarrow U_0 \quad \text{p.s.}$$

10. Pour $j = 0$ la formule (2) devient

$$\int_0^1 p^i dp = \frac{1}{i+1}, \quad i \geq 0.$$

Supposons (2) prouvée pour $j \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 p^i (1-p)^{j+1} dp &= \int_0^1 p^i (1-p)^j (1-p) dp \\ &= \int_0^1 p^i (1-p)^j dp - \int_0^1 p^{i+1} (1-p)^j dp \\ &= \frac{1}{(i+j+1) \binom{i+j}{i}} - \frac{1}{(i+j+2) \binom{i+j+1}{i+1}} \\ &= \frac{i!j!}{(i+j+1)!} \left(1 - \frac{i+1}{i+j+2} \right) = \frac{i!j!}{(i+j+1)!} \frac{j+1}{i+j+2} \\ &= \frac{1}{(i+j+2) \binom{i+j+1}{i}} \end{aligned}$$

et on a (2) pour $j+1$.