PARTIEL 20 novembre 2006
Probabilités approfondies MM011

Durée 2 heures. Documents interdits

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire exponentielle avec loi $e^{-x}\,dx$ sur $\mathbb{R}_+$. Si $x > 0$ on note $[x]$ la partie entière et $\{x\}$ la partie fractionnaire de x :

$$[x] \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \quad [x] \le x < [x] + 1, \quad \{x\} = x - [x] \in [0, 1[.$$

On note $Y := [X]$, $Z := \{X\}$. Remarquer que $X = Y + Z$.

1. Calculer la loi du couple $(Y, Z) \in \mathbb{N} \times [0, 1[$. Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer (sans calculs !) les espérances conditionnelles :

$$\mathbb{E}(Y \,|\, Z), \quad \mathbb{E}(Z \,|\, Y), \quad \mathbb{E}(Y \,|\, X), \quad \mathbb{E}(Z \,|\, X), \quad \mathbb{E}(X \,|\, Y), \quad \mathbb{E}(X \,|\, Z).$$

(On pourra utiliser les formules :

$$\int_0^1 x\, e^{-x}\, dx = 1 - 2e^{-1}, \qquad \int_0^\infty x\, e^{-x}\, dx = 1.)$$

Exercice 2 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles. On suppose qu'il existe une v.a. $X \in L^1$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tels que X_n a la même loi que $\lambda_n \cdot X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable et $\mathbb{P}(X \neq 0) > 0$ alors $\sup_n |\lambda_n| < +\infty$.
2. Montrer que si $\sup_n |\lambda_n| < +\infty$ alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable.

Soient Y_n variable de loi $\alpha_n\, e^{-\alpha_n x}\, 1_{(x>0)}\, dx$, $\alpha_n > 0$ et Z_n gaussienne centrée avec variance $\sigma_n^2 \ge 0$.

3. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sigma_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient uniformément intégrables.
4. Montrer que si Y_n converge vers W en probabilité et $W \in L^1$ alors Y_n converge dans L^1 (calculer $\mathbb{E}(e^{-Y_n})$ et montrer par l'absurde que la condition trouvée au point 3 est satisfaite).

Exercice 3 On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, (X_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ processus adapté à valeurs dans $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$ tel que

$$X_0 = 1 \qquad \text{p.s.}$$

et pour tout $n \geq 0$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1 \,|\, \mathcal{F}_n) = e^{-X_n}, \quad \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 0 \,|\, \mathcal{F}_n) = 1 - e^{-X_n}.$$

1. Prouver que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}^*$ et calculer sa matrice de transition $(Q(x, y) : x, y \in \mathbb{N}^*)$.
2. Montrer que p.s. $X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n$ existe. Calculer $\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n)$ et montrer que $\mathbb{E}(X_\infty) = +\infty$ par l'absurde.
3. Pour tout $n \geq 0$ calculer $\mathbb{P}(X_n = 1)$.
4. Pour tous $n \geq m \geq 0$ calculer $\mathbb{P}(X_n = X_m \,|\, \mathcal{F}_m)$.
5. Calculer pour tout $m \geq 0$:
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = X_m).$$
6. En déduire que
$$\mathbb{P}(\liminf_n \{X_{n+1} = X_n\}) = 0, \qquad \mathbb{P}(\limsup_n \{X_{n+1} = X_n + 1\}) = 1$$
et $\mathbb{P}(X_\infty = +\infty) = 1$.

Correction

Solution de l'exercice 1 (4 points sur 20)

1. Soient $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ et $t, s \in [0, 1[$ avec $s \leq t$.
$$\mathbb{P}(Y = n, s \leq Z \leq t) \;=\; \mathbb{P}([X] = n, s \leq \{X\} \leq t)$$
$$=\; \mathbb{P}(n + s \leq X \leq n + t) = \int_{n+s}^{n+t} e^{-x}\, dx \;=\; e^{-n}(e^{-s} - e^{-t}).$$
On obtient :
$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(Y = n, 0 \leq Z \leq 1) = e^{-n}(1 - e^{-1}),$$
$$\mathbb{P}(s \leq Z \leq t) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(Y = n, s \leq Z \leq t) = \frac{e^{-s} - e^{-t}}{1 - e^{-1}}.$$
Donc (Y, Z) est un couple indépendant. La variable $Y' := Y + 1$ suit une loi géometrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $(1 - e^{-1})$ et Z a densité $f_Z(x) = e^{-x}/(1 - e^{-1})$, $x \in [0, 1[$.

2. On commence par calculer les espérances de X, Y, Z :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x\, e^{-x}\, dx = 1, \qquad \mathbb{E}(Z) = \int_0^1 \frac{x\, e^{-x}}{1-e^{-1}}\, dx = \frac{1-2e^{-1}}{1-e^{-1}}.$$

Puisque $X = Y + Z$ on a

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Z) = \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}$$

et cette valeur correspond à :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Y'-1) = \mathbb{E}(Y') - 1 = \frac{1}{1-e^{-1}} - 1 = \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}$$

car on a dit que $Y' := Y+1$ suit une loi géometrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $(1-e^{-1})$.
Les espérances conditionnelles sont :
– puisque (Y, Z) sont indépendantes :

$$\mathbb{E}(Y \,|\, Z) = \mathbb{E}(Y), \quad \mathbb{E}(Z \,|\, Y) = \mathbb{E}(Z);$$

– puisque $Y = [X]$ et $Z = \{X\}$ sont $\sigma(X)$-mesurables :

$$\mathbb{E}(Y \,|\, X) = \mathbb{E}(\,[X] \,|\, X) = [X] = Y, \quad \mathbb{E}(Z \,|\, X) = \{X\} = Z;$$

– puisque $X = Y + Z$:

$$\mathbb{E}(X \,|\, Y) = \mathbb{E}(Y + Z \,|\, Y) = \mathbb{E}(Y \,|\, Y) + \mathbb{E}(Z \,|\, Y) = Y + \mathbb{E}(Z),$$

$$\mathbb{E}(X \,|\, Z) = \mathbb{E}(Y + Z \,|\, Z) = \mathbb{E}(Y \,|\, Z) + \mathbb{E}(Z \,|\, Z) = Z + \mathbb{E}(Y).$$

Solution de l'exercice 2 (8 points sur 20)

1. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable, en particulier $\sup_n \mathbb{E}(|X_n|) < +\infty$. Comme $\mathbb{E}(|X_n|) = |\lambda_n| E(|X|)$ et que $\mathbb{E}(|X|) > 0$ (puisque $\mathbb{P}(X \neq 0) > 0$), on en déduit que

$$\sup_n |\lambda_n| = \frac{\sup_n \mathbb{E}(|X_n|)}{E(|X|)} < +\infty.$$

2. Pour $a > 0$ on note $\varphi(a) := \mathbb{E}(|X|\, 1_{(|X|>a)})$. La fonction φ est monotone décroissante. Puisque $X \in L^1$ on a $\lim_{a\to+\infty} \varphi(a) = 0$. Or si $M \geq \sup_n |\lambda_n|$:

   $\mathbb{E}(|X_n|\, 1_{(|X_n|>a)}) = |\lambda_n| \mathbb{E}(|X|\, 1_{(|\lambda_n||X|>a)}) = |\lambda_n|\, \varphi(a/|\lambda_n|) \leq M\varphi(a/M)$

   et on obtient :

$$\lim_{a\to+\infty} \sup_n \mathbb{E}(|X_n|\, 1_{(|X_n|>a)}) \leq \lim_{a\to+\infty} M\varphi(a/M) = 0.$$

3. Soient Y une variable exponentielle de moyenne 1 et Z une variable gaussienne standard. Alors Y_n a la même loi que Y/α_n et Z_n a la même loi que $\sigma_n \cdot Z$. Puisque $\mathbb{P}(Y \neq 0) = 1$ et $\mathbb{P}(Z \neq 0) = 1$, on peut appliquer les points 1 et 2 pour trouver que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont uniformément intégrables si et seulement si

$$\inf_n \alpha_n > 0, \qquad \sup_n \sigma_n^2 < +\infty.$$

4. On commence par calculer :

$$\mathbb{E}(e^{-Y_n}) = \int_0^\infty e^{-x}\, \alpha_n\, e^{-\alpha_n x}\, dx = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + 1}.$$

   D'après le point 3, la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable ssi $\inf_n \alpha_n > 0$. Si $\inf_n \alpha_n = 0$ alors il existe une sous-suite $(n_k)_k$ telle que $\alpha_{n_k} \to 0$. Puisque Y_{n_k} converge vers W en probabilité on peut extraire une sous-sous-suite $(n_{k_m})_m$ telle que $Y_{n_{k_m}} \to W$ p.s. et on trouve alors par convergence dominée :

$$0 = \lim_m \frac{\alpha_{n_{k_m}}}{\alpha_{n_{k_m}} + 1} = \lim_m \mathbb{E}(e^{-Y_{n_{k_m}}}) = \mathbb{E}(e^{-W})$$

   donc $\mathbb{P}(W = +\infty) = 1$. Mais $W \in L^1$ et on a une contradiction.
   Puisque $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable et converge en probabilité vers W on a obtenu que Y_n converge vers W dans L^1.

Solution de l'exercice 3 (10 points sur 20)

1. P.s. $X_{n+1} - X_n \in \{0, 1\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour toute $f : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{R}_+$

$$\mathbb{E}(f(X_{n+1}) \,|\, \mathcal{F}_n) = f(X_n + 1)\, e^{-X_n} + f(X_n)\, (1 - e^{-X_n}).$$

   Donc $(X_n)_n$ est bien une chaîne de Markov avec matrice de transition :

$$Q(x, y) = 1_{(x+1=y)}\, e^{-x} + 1_{(x=y)}\, (1 - e^{-x}).$$

2. P.s. $X_{n+1} \geq X_n$ pour tout $n \geq 0$ et la limite de $(X_n)_n$ existe par monotonie. Or :

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = X_n \,(1 - e^{-X_n}) + (X_n + 1)\, e^{-X_n} = X_n + e^{-X_n}.$$

   Ça implique
$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n) + \mathbb{E}(e^{-X_n}).$$
   Par convergence monotone on a $\mathbb{E}(X_\infty) = \lim_n \mathbb{E}(X_n)$, $\mathbb{E}(e^{-X_\infty}) = \lim_n \mathbb{E}(e^{-X_n})$ et
$$\mathbb{E}(X_\infty) \;=\; \mathbb{E}(X_\infty) + \mathbb{E}(e^{-X_\infty}).$$
   Si par l'absurde $\mathbb{E}(X_\infty) < \infty$ on trouve $\mathbb{E}(e^{-X_\infty}) = 0$ et donc $\mathbb{P}(X_\infty = +\infty) = 1$, une contradiction.

3. Puisque $X_n \geq X_i \geq X_0 = 1$ pour tout $n \geq i \geq 0$, alors

$$\{X_n = 1\} \;=\; \{X_0 = X_1 = \cdots = X_n = 1\}.$$

   Donc

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_0 = X_1 = \cdots = X_n = 1) = [Q(1,1)]^n = (1 - e^{-1})^n.$$

4. Puisque $X_n \geq X_i \geq X_m$ pour tout $n \geq i \geq m \geq 0$, alors

$$\{X_n = X_m\} \;=\; \{X_m = X_{m+1} = \cdots = X_n\}.$$

   Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = X_m \,|\, \mathcal{F}_m) &= \mathbb{P}(X_m = X_{m+1} = \cdots = X_n \,|\, X_m) \\ &= [Q(X_m, X_m)]^{n-m} = (1 - e^{-X_m})^{n-m} \quad \text{p.s.}\end{aligned}$$

5. Pour tout $n \geq m$:

$$\mathbb{P}(X_n = X_m) \;= \mathbb{E}(\mathbb{P}(X_n = X_m \,|\, \mathcal{F}_m)) \;=\; \mathbb{E}((1 - e^{-X_m})^{n-m}).$$

   On peut remarque que $1 - e^{-X_m} \in [0, 1[$ p.s. et donc par convergence dominée

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = X_m) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}((1 - e^{-X_m})^{n-m}) \\ &= \mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} (1 - e^{-X_m})^{n-m}) = 0.\end{aligned}$$

6. On rappelle que

$$\liminf_n \{X_{n+1} = X_n\} = \cup_{m\geq 1} \cap_{k\geq m} \{X_{k+1} = X_k\},$$

$$\limsup_n \{X_{n+1} = X_n + 1\} = \left[\liminf_n \{X_{n+1} = X_n\}\right]^c.$$

On voit que :

$$\cap_{k=m}^n \{X_{k+1} = X_k\} = \{X_m = X_{m+1} = \cdots = X_{n+1}\}$$

et par le point 5 on a :

$$\mathbb{P}(\cap_{k\geq m}\{X_{k+1} = X_k\}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_m = X_{m+1} = \cdots = X_{n+1}) = 0.$$

Donc $\mathbb{P}(\liminf_n \{X_{n+1} = X_n\}) = 0$ et $\mathbb{P}(\limsup_n \{X_{n+1} = X_n + 1\}) = 1$. On déduit que p.s. il existe un nombre infini de n tels que $X_{n+1} = X_n + 1$, c'est à dire p.s. $X_\infty = +\infty$.